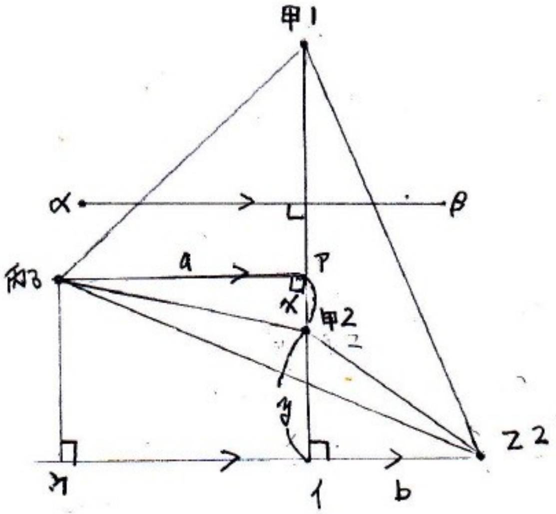
11月の問題1の解法

1. はじめに

２つの甲円の中心を上から甲１、甲２とする。左下の丙円の中心を丙３、右下の乙円の中心を乙２とする。また、２つの甲円が交差する点を α、β とする。
次に、点甲１と点甲２を結ぶ線を下方に延長し、点乙２を通る、点 α と点 β を結ぶ線と平行な線との交点をイとする。
線甲１甲２イと、点丙３を通る、線 $\alpha\beta$ と平行な線がぶつかる点をアとする。
点丙３からの垂線が、点乙２を通る、線 $\alpha\beta$ と平行な線とぶつかる点をウとする。



2. 三角形甲１甲２乙２について

線甲１甲２イは、線 $\alpha\beta$ と垂直に交差し、かつ、線イ乙２は、線 $\alpha\beta$ と平行なので、三角形甲１イ乙２、および三角形甲２イ乙２は、底辺を共有する直角三角形となる。

乙円の半径を r 、線甲２イの長さを y 、線イ乙２の長さを b とおくと、
甲円の半径は 50 寸、丙円の半径は 18 寸なので、三平方の定理から

$$(50+r)^2=(50+50-36+y)^2+b^2 \quad \cdots ①$$
$$(50-r)^2=y^2+b^2 \quad \cdots ②$$

①と②から b^2 を消去して、

$$y=\frac{25r-512}{16} \quad \cdots ③$$

③を②に代入して、

$$b=\frac{\sqrt{377{,}856-369r^2}}{16} \cdots ④$$

3. 三角形甲１丙３甲２について

線甲１甲２イと、線$\alpha\beta$と平行な線丙３アは、点アで垂直にぶつかるので、
三角形甲１丙３アと、三角形甲２丙３アは、底辺を共有する直角三角形となる。

線甲２アの長さを x 、線丙３アの長さを a とおくと、甲円の半径は 50 寸、
丙円の半径は 18 寸なので、三平方の定理から

$(50+18)^2=(50+50-36+x)^2+a^2$ ・・・・⑤

$(50-18)^2=x^2+a^2$ ・・・・⑥

⑤と⑥から a^2 を消去して、

$x=\dfrac{△31}{8}$ ・・・・・⑦ （点アは、線甲１甲２上に存在。）

⑦を⑥に代入して、

$a=\dfrac{\sqrt{64,575}}{8}$ ・・・・・⑧

なお、 x ＝0のときでも、線丙３甲２の長さは、50－18＝32 となるのだが、
実際は $\sqrt{68^2-64^2}\fallingdotseq 22.978$ となるので、 x ＝0は不適。

4. 丙３乙２を斜辺とする直角三角形について

この三角形丙３ウ乙２は直角三角形となるので、
三平方の定理から

$(18+r)^2=(y-x)^2+(a+b)^2$ ⑨

上記③、④、⑦および⑧を⑨に代入して整理して、

$31,716r-755,712=2\times\sqrt{258,300}\times\sqrt{377,856-369r^2}$

両辺を２乗して整理して、

$1,387,155,456r^2-47,936,323,584r+180,699,807,744=0$

インターネットの計算サイトを使って r の値を求めると、
r ＝4.3061703・・・、および 30.2511126・・・
③から r ＞20.48 なので、 r ＝30.2511126・・・
r は半径なので、直径２r ＝60.50222・・・
すなわち、乙円径は、60.50222 余寸となる。

＜終わり＞