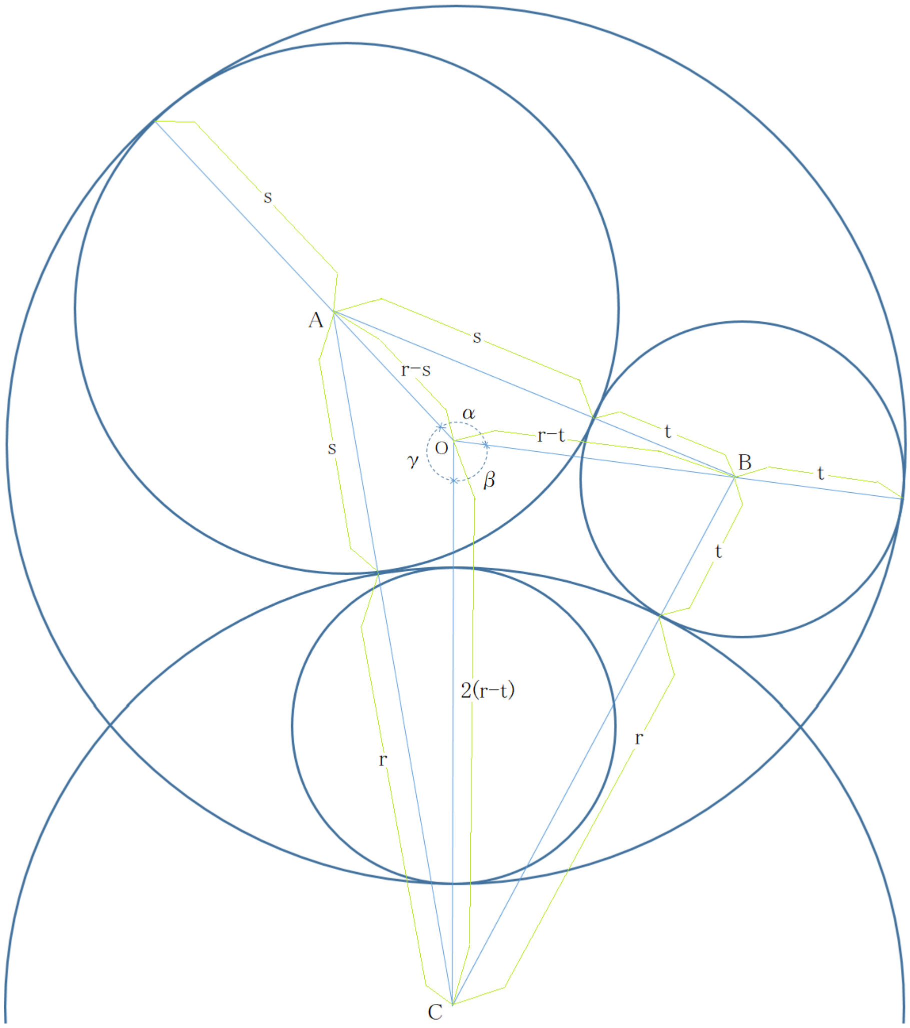
令和4年11月の問題－No.1

甲円、乙円、丙円の半径をそれぞれ r, s, t とする。



△OABより、$(s+t)^2 = (r-s)^2 + (r-t)^2 - 2(r-s)(r-t)\cos\alpha$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{2st}{(r-s)(r-t)} \quad \text{—— ①}$$

△OBCより、$(r+t)^2 = (r-t)^2 + \{2(r-t)\}^2 - 2(r-t)\{2(r-t)\}\cos\beta$

$$\cos\beta = 1 - \frac{rt}{(r-t)^2} \quad \text{—— ②}$$

△OACより、$(r+s)^2 = (r-s)^2 + \{2(r-t)\}^2 - 2(r-s)\{2(r-t)\}\cos\gamma$

$$\cos\gamma = \frac{(r-t)^2 - rs}{(r-s)(r-t)} \quad \text{—— ③}$$

$\alpha+\beta = 2\pi-\gamma \qquad \cos(\alpha+\beta) = \cos(2\pi-\gamma) = \cos\gamma$

$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos\gamma$

$\sin^2\alpha\sin^2\beta = (\cos\alpha\cos\beta - \cos\gamma)^2$

$1-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta) = -2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos^2\gamma$

$(\cos\alpha-\cos\beta)^2 + (1-\cos\gamma)(2\cos\alpha\cos\beta-1-\cos\gamma) = 0$

式①～③を代入すると、

$$t^2(r(r-s)-2s(r-t))^2 + \left[(r-s)(r-t)-(r-t)^2+rs\right]\left[(r-s)(r-t)^3 - 2rt(r-s)(r-t) - 4st(r-t)^2 + 4rst^2 - (r-t)^4 + rs(r-t)^2\right] = 0$$

$$\left[(2r-t)^2+4r^2\right]s^2 - 2(2r-t)\left[(r-t)^2+r^2\right]s + t^2(2r-t)^2 = 0$$

$$s = \frac{(2r-t)\left[(r-t)^2+r^2 \pm 2r\sqrt{r(r-2t)}\right]}{(2r-t)^2+4r^2}$$

甲円径 2r=100寸より r=50、丙円径 2t=36寸より t=18 を代入すると、乙円径 $2s = \dfrac{164\left(881 \pm 250\sqrt{7}\right)}{4181}$

2s>2tより、 $2s = \dfrac{164\left(881 + 250\sqrt{7}\right)}{4181} \fallingdotseq 60.5022$寸