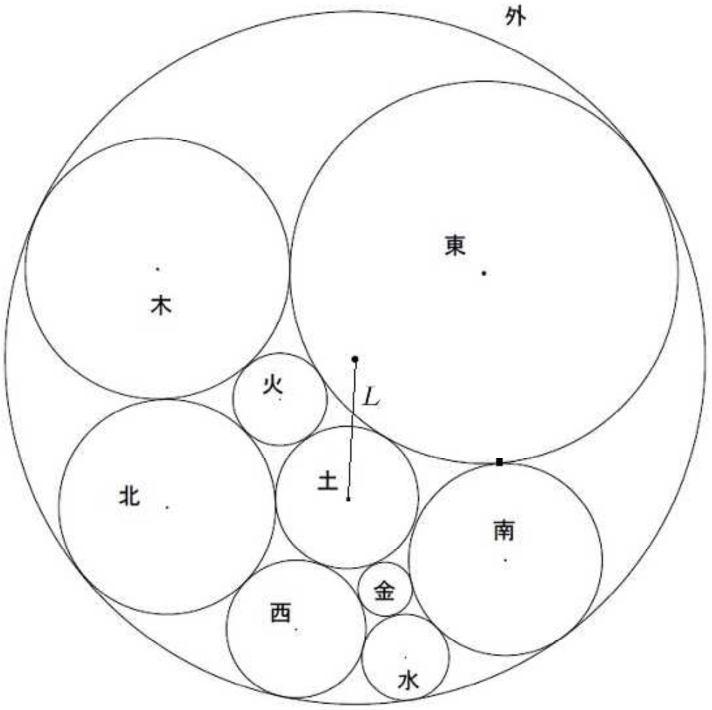
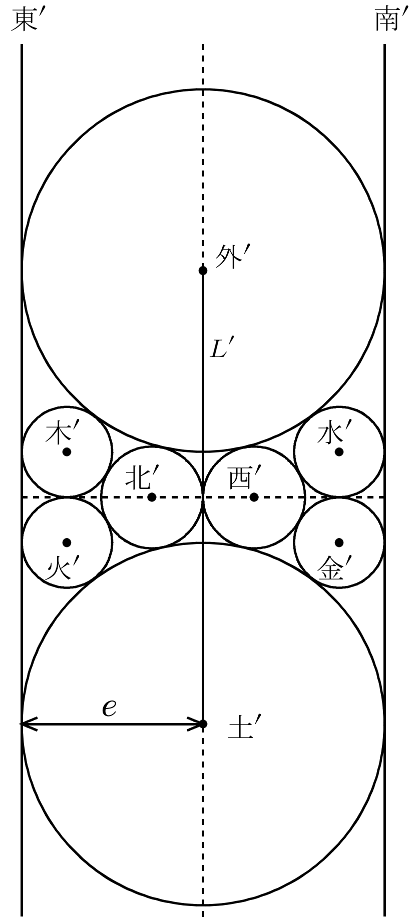
令和４年１１月の問題２の解答

東京都葛飾区　永井信一



図のように、外円の中に９つの円が互いに接している。
東円の直径が１９８寸，南円の直径が６６寸，土円の直径が３６寸のとき
外円の直径を求めよ。
また、火円の直径が２２寸であることを示せ。

（額題輯録の問題から）



反転図

(1)　元図の外円の半径を R として，土円と外円の中心間距離 L を

算法助術の公式７６を使って求める。

東円半径 99　南円半径 33　土円半径 18　より，

東円半径＋南円半径 132　東円半径＋南円半径＋土円半径 150　を公式７６に代入して，

$$132^2\{(R+18)^2-L^2\}=4\times 99\times 33\left\{150R+18(R-132)+2\sqrt{150(R-132)R\times 18}\right\}$$

式を整理して，　$L^2=(R+18)^2-9\left\{14R-198+5\sqrt{3R(R-132)}\right\}$　①

(2)　東円と南円の接点で反転し，反転図で土′円と外′円の中心間距離 L' を求める。

反転図より，土′円半径＝外′円半径なので，これを e とする。

三平方の定理から，火′，水′，木′，金′の各円の半径は，$\dfrac{1}{4}e$

北′, 西′の各円の半径は，$\dfrac{9}{32}e$　となるので，

$$L'^2=4\left\{\left(e+\frac{9}{32}e\right)^2-\left(\frac{9}{32}e\right)^2\right\}=\frac{25}{4}e^2$$　②

(3)　非法道寺型反転不変式（田部井勝稲 編著の「精要算法」の呼び方）を使って，

外円の半径 R を求める。

$\dfrac{L^2-(R-18)^2}{18R}=4-\dfrac{L'^2}{e^2}$　　に①，②を代入する，

$$\frac{(R+18)^2-9\left\{14R-198+5\sqrt{3R(R-132)}\right\}-(R-18)^2}{18R}=4-\frac{\frac{25}{4}e^2}{e^2}$$

式を整理して，　$(R-132)(97R+396)=0$

$R>0$　より，　$R=132$　　　答　外円の直径は２６４寸

(4)　元図の火円の半径を r として，火円と南円の共通接線の長さ T を

算法助術の公式７２を使って求める。

東円半径 99　南円半径 33　土円半径 18　より，

東円半径＋土円半径 117　東円半径＋南円半径＋土円半径 150　を公式７２に代入して，

$$117^2T^2=4\times18\times99\left\{150r+33(117+r)+2\sqrt{150(117+r)\times33r}\right\}$$

式を整理して，

$T^2=\dfrac{264}{169}\left\{1287+61r+10\sqrt{22r(117+r)}\right\}$　　③

(5)　反転図で，算変基本式２（田部井勝稲・松本登志雄 著の「反転法と算変法」の呼び方）を

使って，火円の半径 r を求める。

火′円の半径は，$\dfrac{1}{4}e$　だから，火′円の中心から南′円（直線）までの距離は　$2e-\dfrac{1}{4}e=\dfrac{7}{4}e$

算変基本式２に代入すると，

$\dfrac{T^2}{2r\times33}-1=\dfrac{\frac{7}{4}e}{\frac{1}{4}e}$　　式を整理して，　$T^2=528r$　　④

④を③に代入して，

$$\frac{264}{169}\left\{1287+61r+10\sqrt{22r(117+r)}\right\}=528r$$

式を整理して，

$49r^2-638r+1089=0$

$(r-11)(49r-99)=0$

$r=11$ ，$r=\dfrac{99}{49}$

$r=\dfrac{99}{49}$　は無縁根　　　答　火円の直径は２２寸