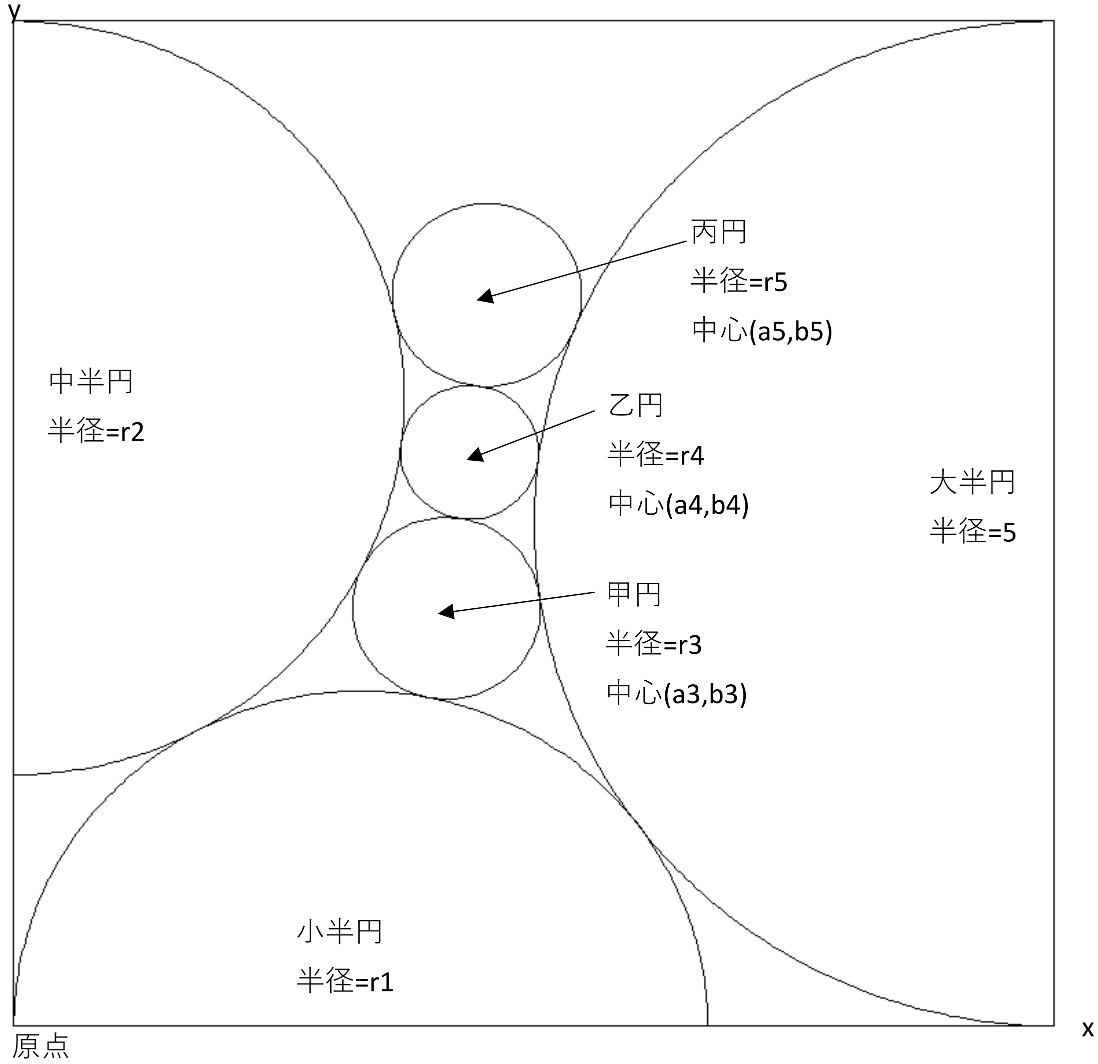
令和４年7月の問題-No.2　解法

各円の半径や中心点、座標原点を以下の図のようにとる。



小半円と大半円のそれぞれの中心を通る線分と正方形の辺で出来る直角三角形から三平方の定理より

$$(10-r_1)^2+5^2=(5+r_1)^2$$

が成立する。これを解いて小半円半径r1は、

$$r_1=\frac{10}{3}$$

を得る。
同様にして、中半円と小半円の中心を結んだ線分を考えて、三平方の定理より
$$r_1^2+(10-r_2)^2=(r_1+r_2)^2$$
が成立する。これを解いて
$$r_2=\frac{15}{4}$$

を得る。

3つの円に接する円の中心と半径は、その円に接する3つの円の中心と半径が
決定すると求められる。

甲円の中心(a3,b3)と半径r3について、接する大中小半円の半径と中心から
以下の式が成立する。

$$(10-a_3)^2+(5-b_3)^2=(5+r_3)^2$$

$$(0-a_3)^2+\left(\frac{25}{4}-b_3\right)^2=\left(\frac{15}{4}+r_3\right)^2$$

$$\left(\frac{10}{3}-a_3\right)^2+(0-b_3)^2=\left(\frac{10}{3}+r_3\right)^2$$

これらを解いて

$$a_3=\frac{230}{47}-\frac{20\sqrt{3}}{47},\quad b_3=\frac{230}{47}-\frac{20\sqrt{3}}{47},\quad r_3=\frac{140\sqrt{3}}{47}-\frac{200}{47}$$

を得る。近似値としては

a3= 4.15657412443878

b3= 4.15657412443878

r3= 0.90398112892857

となる。

乙円の位置(a4,b4)と半径r4を甲円の時と同様にして求める。
以下の式が成立する。

$$(10-a_4)^2+(5-b_4)^2=(5+r_4)^2$$

$$(0-a_4)^2+\left(\frac{25}{4}-b_4\right)^2=\left(\frac{15}{4}+r_4\right)^2$$

$$\left(\frac{1}{47}\left(230-20\sqrt{3}\right)-a_4\right)^2+\left(\frac{1}{47}\left(230-20\sqrt{3}\right)-b_4\right)^2=\left(\frac{1}{47}\left(140\sqrt{3}-200\right)+r_4\right)^2$$

これらを解いて

$$a_4=\frac{270}{59}-\frac{20}{59\sqrt{3}},\quad b_4=\frac{510}{59}-\frac{100\sqrt{3}}{59},\quad r_4=\frac{120}{59}-\frac{140}{59\sqrt{3}}$$

となる。近似値としては

a4= 4.38055923078318

b4= 5.70838846174767

r4= 0.66391461548224

となる。

最後に丙円の中心(a5,b5)と半径r5についても同様に式を立てて求める。
以下の式が成立する。

$$(10-a_5)^2+(5-b_5)^2=(5+r_5)^2$$

$$(0-a_5)^2+\left(\frac{25}{4}-b_5\right)^2=\left(\frac{15}{4}+r_5\right)^2$$

$$\left(\frac{1}{59}\left(270-\frac{20}{\sqrt{3}}\right)-a_5\right)^2+\left(\frac{1}{59}\left(510-100\sqrt{3}\right)-b_5\right)^2=\left(\frac{1}{59}\left(120-\frac{140}{\sqrt{3}}\right)+r_5\right)^2$$

これらを解いて

$$a_5=\frac{50}{11},\quad b_5=\frac{80}{11},\quad r_5=\frac{10}{11}$$

を得る。甲円の中心位置と半径も解になるが、それではないことに注意する。

以上より、丙円径=2*r5=20/11≒1.8181818寸