

7月の問題 第2問

1. 小円と中円の半径を求める

三平方の定理から $(5+小)^2 = 5^2 + (10-小)^2$

30 小=100

よって 小 = $\frac{10}{3}$

同様に三平方の定理から $(\frac{10}{3}+中)^2 = (\frac{10}{3})^2 + (10-中)^2$

$\frac{80}{3}$ 中=100

よって 中 = $\frac{15}{4}$

2. 甲円の半径を求める

三平方の定理から $(\frac{10}{3}+甲)^2 = a^2 + b^2$ とおく ①

同様に $(\frac{15}{4}+甲)^2 = (\frac{10}{3}+a)^2 + (\frac{25}{4}-b)^2$ ②

$(5+甲)^2 = (\frac{20}{3}-a)^2 + (5-b)^2$ ③

③-①から 甲 = $\frac{50}{3} - 4a - 3b$ ④

②-①から 甲 = $8a - 15b + \frac{170}{3}$ ⑤

④と⑤から甲を消去して $-3a + 3b = 10$

すなわち $b = a + \frac{10}{3}$ ⑥

⑥を⑤に代入して 甲 = $\frac{20}{3} - 7a$ ⑦

⑥と⑦を①に代入して整理すると $47a^2 - \frac{440}{3}a + \frac{800}{9} = 0$

$a > 0$ なので $a = \frac{220 - 60\sqrt{3}}{141}$

⑥に代入して $b = \frac{230 - 20\sqrt{3}}{47}$

⑦に代入して 甲 = $\frac{140\sqrt{3} - 200}{47}$ ⑧

3. 乙円の半径を求める

三平方の定理から $(甲+乙)^2 = c^2 + d^2$ とおく ⑨

同様に $(\frac{15}{4}+乙)^2 = (b+c)^2 + (\frac{25}{4}-b-d)^2$ ⑩

$(5+乙)^2 = (10-b-c)^2 + (b+d-5)^2$ ⑪

⑪-⑩から 乙 = $30 - 7b - 8c + d = 甲 - 8c + d$ ⑫

⑪-⑨から $2 \times (5-甲) 乙 = 100 - 30b + 2b^2 + 甲^2 + 2 \times (b-10) \times c + 2 \times (b-5) \times d$ ⑬

⑬と⑫から乙を消去して整理すると

$$\frac{149}{2} b^2 - 610b + 1250 + (57b - 210) \times c = (6b - 20) \times d$$

両辺を $(6b-20)$ で割り、 $b = \frac{230 - 20\sqrt{3}}{47}$ を代入して整理すると

$$d = \frac{27 - 3\sqrt{3}}{4} \times c + \frac{310 - 170\sqrt{3}}{47} \dots\dots\dots ⑭$$

⑧、⑫、⑭を⑨に代入して整理すると

$$(45-12\sqrt{3})c^2 + \left(\frac{5,220-2,620\sqrt{3}}{47}\right)c + \frac{138,400-85,600\sqrt{3}}{47 \times 47}$$

$a > 0$ なので $c = \frac{2600\sqrt{3}-2,640}{177 \times 47}$

⑭に代入して $d = \frac{10400-3520\sqrt{3}}{47 \times 59}$

⑫に代入して $乙 = \frac{360-140\sqrt{3}}{177} \dots \dots \textcircled{15}$

4. 丙円の半径を求める

三平方の定理から $(乙+丙)^2 = e^2 + f^2$ とおく $\dots \dots \textcircled{16}$

同様に $(\frac{15}{4} + 丙)^2 = (b+c+e)^2 + (b+d+f-\frac{25}{4})^2 \dots \dots \textcircled{17}$

$$(5+丙)^2 = (10-b-c-e)^2 + (b+d+f-5)^2 \dots \dots \textcircled{18}$$

⑫-⑭から 丙 = $30-7b-8c+d-8e+f = 乙-8e+f \dots \dots \textcircled{19}$

⑫-⑬から $2 \times (5-乙) \times 丙 = (10-b-c)^2 + (b+d-5)^2 + 乙^2$
 $-25 - 2 \times (10-b-c) \times e + 2 \times (b+d-5) \times f \dots \dots \textcircled{20}$

⑬と⑳から乙を消去して整理すると

$$\frac{125,600-67,200\sqrt{3}}{59} + (3,240+1,100\sqrt{3})e + (120-440\sqrt{3})f$$

すなわち $f = \frac{3,240+1,100\sqrt{3}}{440\sqrt{3}-120}e + \frac{125,600-67,200\sqrt{3}}{59 \times (440\sqrt{3}-120)}$

整理して $f = \frac{11\sqrt{3}+13}{4}e + \frac{250\sqrt{3}-390}{177} \dots \dots \textcircled{21}$

⑫、⑬、⑮を⑬に代入して整理すると

$$(44\sqrt{3}-11)e^2 + \frac{5,220-2,620\sqrt{3}}{177}e + \frac{228,000-175,200\sqrt{3}}{177 \times 177} = 0$$

$a > 0$ なので
 $e = \frac{220\sqrt{3}-60}{11 \times 177}$

⑫に代入して
 $f = \frac{3,300\sqrt{3}-2,670}{11 \times 177}$

⑬に代入して 丙 = $\frac{10}{11} = 0.909090909$ 余

5. まとめ

丙の値は丙円の半径なので、直径はその2倍の1.818181818余寸となる。

<終わり>