令和４年８月の問題 - No.1

◉問題文の意訳

図示のとおり直径 1174 寸の円を 3 個含む正三角形の一辺 (三角面) は何寸か？

◉解法

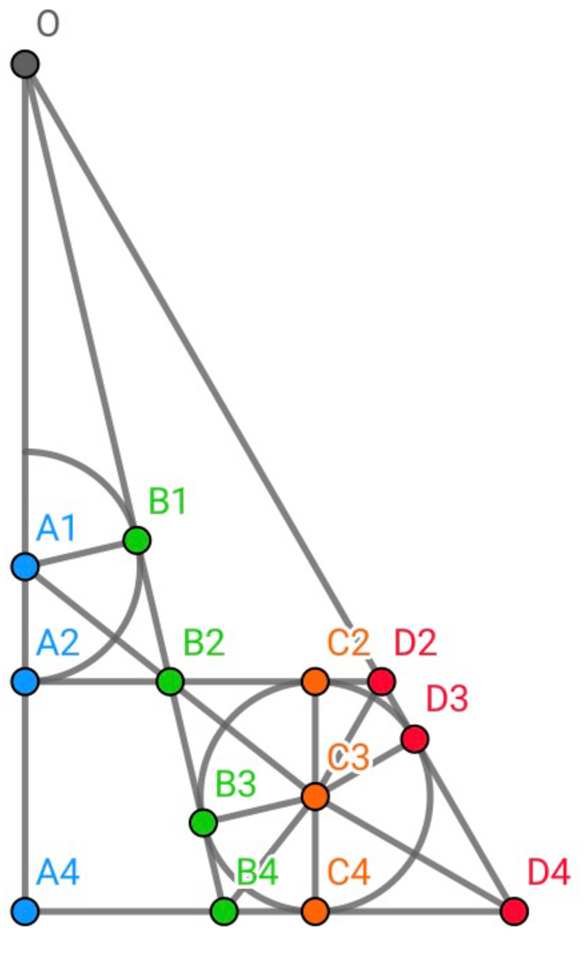
図は左右対称のため，右半分のみを図示する.

(円の半径 : 587 寸) $= r \quad (r > 0)$

(正三角形の垂線の足 : OA_4) $= ar \quad (a > 4)$

(正三角形の一辺 : OD_4) $= \frac{2}{\sqrt{3}}ar$

以降，相似な直角三角形にて辺の長さの比を考え，上記の a を求める.



① 辺の長さの比が $\sqrt{3}:1:2$ の相似な直角三角形に着目し，辺 A_2C_2 の長さを求める．

$\triangle OA_2D_2 \backsim \triangle C_3C_2D_2$ から

$OA_2 : A_2D_2 = C_3C_2 : C_2D_2$

$(a-2)r : \frac{1}{\sqrt{3}}(a-2)r = r : \frac{1}{\sqrt{3}}r$

$\therefore\ A_2C_2 = A_2D_2 - C_2D_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(a-3)r$

② 対頂角が共通で合同な直角三角形に着目し，①の結果から辺 A_2B_2 の長さを求める．

$\triangle A_1A_2B_2 \equiv \triangle C_3C_2B_2$ から

$\therefore\ A_2B_2 = C_2B_2 = \frac{1}{2}A_2C_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(a-3)r$

③ 頂角が共通で相似な直角三角形に着目し，②の結果から a を求める．

$\triangle OB_1A_1 \backsim \triangle OA_2B_2$ から

$OB_1(=\sqrt{OA_1^2 - B_1A_1^2}) : B_1A_1 = OA_2 : A_2B_2$

$\sqrt{\{(a-3)r\}^2 - r^2} : r = (a-2)r : \frac{1}{2\sqrt{3}}(a-3)r$

整理すると，以下の4次方程式を得る．

$a^4 - 12a^3 + 41a^2 - 54a + 24 = 0 \quad (r > 0)$

$(a-1)(a-2)(a^2 - 9a + 12) = 0$

$\therefore\ a = 1, 2, \dfrac{9 \pm \sqrt{33}}{2} \ \rightarrow\ a = \dfrac{9 + \sqrt{33}}{2} \quad (a > 4)$

④ 正三角形の一辺を求める．

(正三角形の一辺)

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}ar = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{9+\sqrt{33}}{2}r = (3\sqrt{3}+\sqrt{11})r$$

$$= (3\sqrt{3}+\sqrt{11}) \cdot 587 = 4997.0002 \cdots$$

◉術の意訳

2.75 と 6.75 の各平方根の和に円の直径を乗じ，正三角形の一辺を得る．

(正三角形の一辺)

$$= (\sqrt{6.75}+\sqrt{2.75}) \cdot 2r = \left(\sqrt{\frac{27}{4}}+\sqrt{\frac{11}{4}}\right) \cdot 2r$$

$$= (3\sqrt{3}+\sqrt{11})r \quad \cdots \text{④と同じ結果となる}$$

◉答え

(正三角形の一辺) = 4997 寸より少し大きい

◉問題文の答え

『答曰　三角面　四千九百九十七　寸有奇』