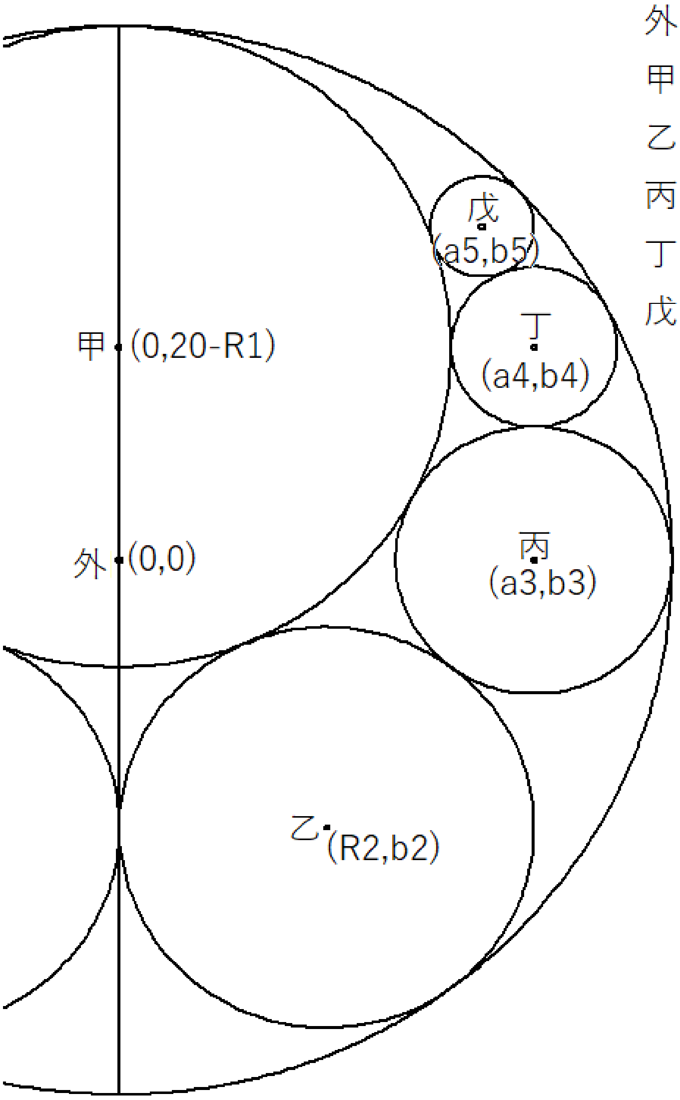
令和４年8月の問題-No.2　解法

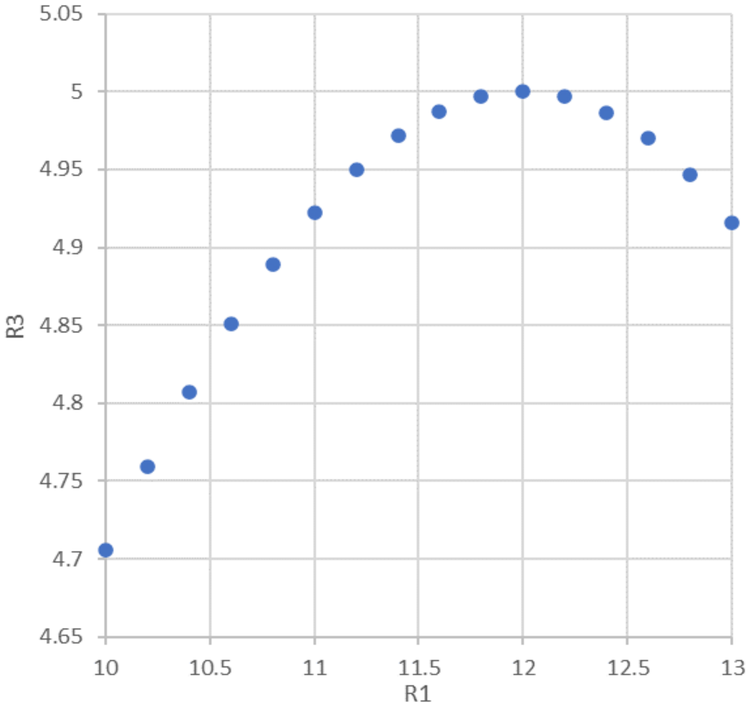
図の対称性から以下の図のように右半分を考える。
外円中心を原点とする座標系をとり各円の中心を考える。
題意から円の中心座標が半径で表されるものはすでに半径で示してある。
問題は、以下のような図形が成立する際、丙円の直径が最も大きくなる場合に
戊円径がいくつになるかを求めるものである。



外円半径R0=20
甲円半径R1
乙円半径R2
丙円半径R3
丁円半径R4
戊円半径R5

甲乙丙円について、甲円半径R1を変えた際に
丙円半径R3がどう変化するかを確かめる。
大円及び甲乙丙円の接触の関係から以下の式が成立する。
(R2-0)^2+(b2-0)^2=(20-R2)^2　　(1)
(a3-0)^2+(b3-0)^2=(20-R3)^2　　(2)
(R2-0)^2+(b2-(20-R1))^2=(R1+R2)^2　　(3)
(a3-0)^2+(b3-(20-R1))^2=(R1+R3)^2　　(4)
(R2-a3)^2+(b2-b3)^2=(R2+R3)^2　　(5)

(1)～(5)式を満たすR2,b2,a3,b3,R3を数値計算によって求め、
R1を変更した場合、R1対R3のグラフは以下のようになる。



グラフよりR1=12の時にR3は最大値5となることが予想される。
いま、R1によってR2,b2,a3,b3,R3の値が決まるので、R2,b2,a3,b3,R3は
R1の関数と考えられる。
R3が最大になるとき、R3をR1で微分した値dR3/dR1=0であることを利用して、
R3の最大値を(数値的にではあるが)厳密に求めることにする。
(1)～(5)式の両辺をR1で微分すると、R3が最大値の時、以下の式が成立する。

2*R2*R2'+2*b2*b2'=2*(20-R2)*(-R2')　　(6)
2*a3*a3'+2*b3*b3'=2*(20-R3)*(-R3')=0　　(7)
2*R2*R2'+2*(b2-(20-R1))*(b2'+1)=2*(R1+R2)*(1+R2')　　(8)
2*a3*a3'+2*(b3-(20-R1))*(b3'+1)=2*(R1+R3)*(1+0)　　(9)
2*(R2-a3)*(R2'-a3')+2*(b2-b3)*(b2'-b3')=2*(R2+R3)*(R2'+0)　　(10)

ここで ' は各関数のR1による微分係数を意味する。
(1)～(10)式が成立するようにR1,R2,b2,a3,b3,R3,R2',b2',a3',b3'を数値計算に
よって求めると、初期値をR1=12で得られる結果から設定して

R1= 12	R2'= -0.78125
R2= 7.5	b2'= -1.5625
R3= 5	a3'= 0
b2= -10	b3'= -3.125
a3= 15	
b3= 0	

が得られる。よってR3は最大値5をR1=12でとることが(数値的に)分かった。

丙円径=10寸が定まったので、丁円径、戊円径について求める。

外円及び甲丙丁戊円の接触条件より以下の式が成立する。

(a4-0)^2+(b4-0)^2=(20-R4)^2　　(11)

(a4-0)^2+(b4-8)^2=(12+R4)^2　　(12)

(a4-15)^2+(b4-0))^2=(5+R4)^2　　(13)

(a4-a5)^2+(b4-b5)^2=(R4+R5)^2　　(14)

(a5-0)^2+(b5-0)^2=(20-R5)^2　　(15)

(a5-0)^2+(b5-8)^2=(12+R5)^2　　(16)

(11)～(16)式を数値計算で解いて以下の結果を得る。

a4= 15	a5= 13.125
b4= 8	b5= 12.5
R4= 3	R5= 1.875

以上より、丙円径が最大となる時、<u>**戊円径=2*R5=3.75寸**</u>を得る。