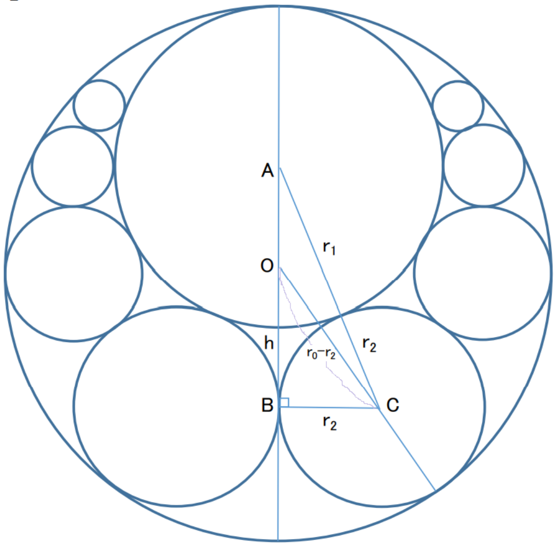
令和４年８月の問題ーNo.2

外円の半径をr_0, 甲,乙,丙,丁,戊の各円の半径をそれぞれ r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 とする。

【r_2の算出】



△OBCより、

$$(r_0-r_2)^2 = r_2{}^2 + h^2$$

$$h^2 = r_0{}^2 - 2r_0r_2$$

△ABCより、

$$(r_1+r_2)^2 = r_2{}^2 + \left[h + (r_0-r_1)\right]^2$$

$$2r_1r_2 = h^2 + 2(r_0-r_1)h + r_0{}^2 - 2r_0r_1$$

$$h^2 + 2(r_0-r_1)h + r_0{}^2 - 2r_0r_1 - 2r_1r_2 = 0$$

$$\left[r_0{}^2 - 2r_0r_2\right] + 2(r_0-r_1)h + r_0{}^2 - 2r_0r_1 - 2r_1r_2 = 0$$

$$(r_0-r_1)h + r_0(r_0-r_1) - r_2(r_0+r_1) = 0$$

$$h = \frac{r_0+r_1}{r_0-r_1}r_2 - r_0$$

$$h^2 = \left(\frac{r_0+r_1}{r_0-r_1}\right)^2 r_2{}^2 - 2r_0r_2\left(\frac{r_0+r_1}{r_0-r_1}\right) + r_0{}^2$$

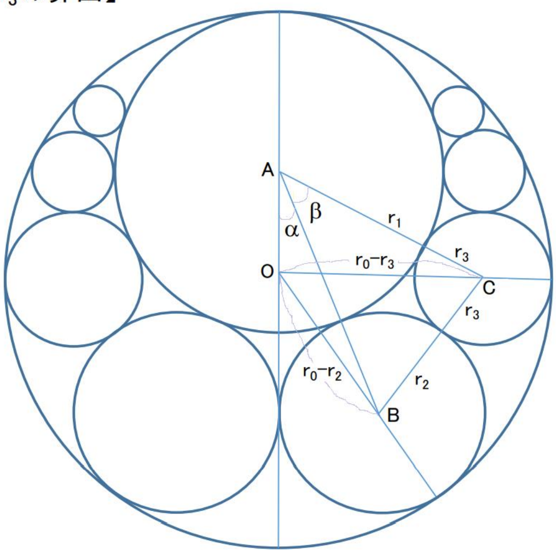
$$r_0{}^2 - 2r_0r_2 = \left(\frac{r_0+r_1}{r_0-r_1}\right)^2 r_2{}^2 - 2r_0r_2\left(\frac{r_0+r_1}{r_0-r_1}\right) + r_0{}^2$$

$$\left(\frac{r_0+r_1}{r_0-r_1}\right)^2 r_2{}^2 = 2r_0r_2\left(\frac{r_0+r_1}{r_0-r_1} - 1\right) = 2r_0r_2\frac{2r_1}{r_0-r_1} = \frac{4r_0r_1r_2}{r_0-r_1}$$

$$\frac{(r_0+r_1)^2}{r_0-r_1}r_2 = 4r_0r_1$$

$$r_2 = \frac{4r_0r_1(r_0-r_1)}{(r_0+r_1)^2}$$

【r_3の算出】



△AOBより、

$$(r_0-r_2)^2 = (r_0-r_1)^2 + (r_1+r_2)^2 - 2(r_0-r_1)(r_1+r_2)\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{2r_0r_2}{(r_0-r_1)(r_1+r_2)} - 1$$

△ABCより、

$$(r_2+r_3)^2 = (r_1+r_2)^2 + (r_1+r_3)^2 - 2(r_1+r_2)(r_1+r_3)\cos\beta$$

$$\cos\beta = 1 - \frac{2r_2r_3}{(r_1+r_2)(r_1+r_3)}$$

△AOCより、

$$(r_0-r_3)^2 = (r_0-r_1)^2 + (r_1+r_3)^2 - 2(r_0-r_1)(r_1+r_3)\cos(\alpha+\beta)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{2r_0r_3}{(r_0-r_1)(r_1+r_3)} - 1$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \qquad \sin\alpha\sin\beta = \cos\alpha\cos\beta - \cos(\alpha+\beta)$$

$$\sin^2\alpha\sin^2\beta = \cos^2\alpha\cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha+\beta)$$

$$1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta = \cos^2\alpha\cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha+\beta)$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha+\beta) = 0$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\left[\frac{2r_0r_3}{(r_0-r_1)(r_1+r_3)} - 1\right] + \left[\frac{2r_0r_3}{(r_0-r_1)(r_1+r_3)} - 1\right]^2 - 1 = 0$$

$$(\cos\alpha+\cos\beta)^2 - \cos\alpha\cos\beta\frac{4r_0r_3}{(r_0-r_1)(r_1+r_3)} + \frac{4r_0{}^2r_3{}^2}{(r_0-r_1)^2(r_1+r_3)^2} - \frac{4r_0r_3}{(r_0-r_1)(r_1+r_3)} = 0$$

$$\left[\frac{2r_0r_2}{(r_0-r_1)(r_1+r_2)}-\frac{2r_2r_3}{(r_1+r_2)(r_1+r_3)}\right]^2-\frac{4r_0r_3}{(r_0-r_1)^2(r_1+r_3)^2}\left[\left[\left[\frac{2r_0r_2}{(r_0-r_1)(r_1+r_2)}-1\right]\left[1-\frac{2r_2r_3}{(r_1+r_2)(r_1+r_3)}\right]+1\right](r_0-r_1)(r_1+r_3)-r_0r_3\right]=0$$

$$\frac{r_1^2r_2^2(r_0+r_3)^2}{(r_0-r_1)^2(r_1+r_2)^2(r_1+r_3)^2}-\frac{r_0r_3}{(r_0-r_1)^2(r_1+r_3)^2}\left[2r_2\left[\frac{r_0(r_1+r_3)}{r_1+r_2}+\frac{r_3(r_0-r_1)}{r_1+r_2}-\frac{2r_0r_2r_3}{(r_1+r_2)^2}\right]-r_0r_3\right]=0$$

$$r_1^2r_2^2(r_0+r_3)^2-r_0r_3\left[2r_2\left[r_0(r_1+r_3)(r_1+r_2)+r_3(r_0-r_1)(r_1+r_2)-2r_0r_2r_3\right]-r_0r_3(r_1+r_2)^2\right]=0$$

$$\left[r_1^2r_2^2+4\,r_0^2r_2^2+r_0^2(r_1+r_2)^2-2r_0r_2(r_1+r_2)(2r_0-r_1)\right]r_3^2+2r_0r_1r_2\left[r_1r_2-r_0(r_1+r_2)\right]r_3+r_0^2r_1^2r_2^2=0$$

$$\left[\left[r_0r_1+(r_0-r_1)r_2\right]^2-4r_0r_1r_2(r_0-r_1-r_2)\right]r_3^2-2r_0r_1r_2\left[r_0r_1+(r_0-r_1)r_2\right]r_3+r_0^2r_1^2r_2^2=0$$

$$r_3=\frac{r_0r_1r_2\left[r_0r_1+(r_0-r_1)r_2\right]\pm r_0r_1r_2\sqrt{4r_0r_1r_2(r_0-r_1-r_2)}}{\left[r_0r_1+(r_0-r_1)r_2\right]^2-4r_0r_1r_2(r_0-r_1-r_2)}=\frac{r_0r_1r_2\left[r_0r_1+(r_0-r_1)r_2\pm\sqrt{4r_0r_1r_2(r_0-r_1-r_2)}\right]}{\left[r_0r_1+(r_0-r_1)r_2\right]^2-4r_0r_1r_2(r_0-r_1-r_2)}$$

$r_2=\dfrac{4r_0r_1(r_0-r_1)}{(r_0+r_1)^2}$ より、

$$r_0-r_1-r_2=(r_0-r_1)-\frac{4r_0r_1(r_0-r_1)}{(r_0+r_1)^2}=(r_0-r_1)\left[1-\frac{4r_0r_1}{(r_0+r_1)^2}\right]=\frac{r_0-r_1}{(r_0+r_1)^2}(r_0-r_1)^2=\frac{r_2}{4r_0r_1}(r_0-r_1)^2$$

$$r_3=\frac{r_0r_1r_2\left[r_0r_1+(r_0-r_1)r_2\pm(r_0-r_1)r_2\right]}{\left[r_0r_1+(r_0-r_1)r_2\right]^2-(r_0-r_1)^2r_2^2}=\frac{\left[r_0r_1+(1\pm1)(r_0-r_1)r_2\right]r_2}{r_0r_1+2(r_0-r_1)r_2}$$

(i) $r_3=\dfrac{\left[r_0r_1+2(r_0-r_1)r_2\right]r_2}{r_0r_1+2(r_0-r_1)r_2}=r_2$ なので除外する。

(ii) $r_3=\dfrac{r_0r_1r_2}{r_0r_1+2(r_0-r_1)r_2}$

【r_4の算出】

r_3と同様に解くと、 $r_4=\dfrac{r_0r_1r_3\left[r_0r_1+(r_0-r_1)r_3\pm\sqrt{4r_0r_1r_3(r_0-r_1-r_3)}\right]}{\left[r_0r_1+(r_0-r_1)r_3\right]^2-4r_0r_1r_3(r_0-r_1-r_3)}$

$r_3=\dfrac{r_0r_1r_2}{r_0r_1+2(r_0-r_1)r_2}$ より、

$$r_0-r_1-r_3=(r_0-r_1)-\frac{r_0r_1r_2}{r_0r_1+2(r_0-r_1)r_2}=(r_0-r_1)-\frac{r_0r_1}{\frac{r_0r_1}{r_2}+2(r_0-r_1)}=(r_0-r_1)-\frac{r_0r_1}{\frac{(r_0+r_1)^2}{4(r_0-r_1)}+2(r_0-r_1)}$$

$$=(r_0-r_1)\left[1-\frac{4r_0r_1}{(r_0+r_1)^2+8(r_0-r_1)^2}\right]=\frac{9(r_0-r_1)^3}{(r_0+r_1)^2+8(r_0-r_1)^2}=\frac{9(r_0-r_1)^3}{\frac{4r_0r_1(r_0-r_1)}{r_2}+8(r_0-r_1)^2}$$

$$=\frac{9(r_0-r_1)^2r_2}{4\left[r_0r_1+2(r_0-r_1)r_2\right]}=\frac{9(r_0-r_1)^2r_2}{4\frac{r_0r_1r_2}{r_3}}=\frac{9(r_0-r_1)^2r_3}{4r_0r_1}$$

$$r_4=\frac{r_0r_1r_3\left[r_0r_1+(r_0-r_1)r_3\pm3(r_0-r_1)r_3\right]}{\left[r_0r_1+(r_0-r_1)r_3\right]^2-9(r_0-r_1)^2r_3^2}=\frac{r_0r_1r_3\left[r_0r_1+(1\pm3)(r_0-r_1)r_3\right]}{\left[r_0r_1+4(r_0-r_1)r_3\right]\left[r_0r_1-2(r_0-r_1)r_3\right]}$$

(i) $r_4=\dfrac{r_0r_1r_3}{r_0r_1-2(r_0-r_1)r_3}=\dfrac{r_0r_1}{\frac{r_0r_1}{r_3}-2(r_0-r_1)}=\dfrac{r_0r_1}{\frac{r_0r_1+2(r_0-r_1)r_2}{r_2}-2(r_0-r_1)}=\dfrac{r_0r_1r_2}{r_0r_1}=r_2$ なので除外する。

(ii) $r_4=\dfrac{r_0r_1r_3}{r_0r_1+4(r_0-r_1)r_3}=\dfrac{r_0r_1}{\frac{r_0r_1}{r_3}+4(r_0-r_1)}=\dfrac{r_0r_1}{\frac{r_0r_1+2(r_0-r_1)r_2}{r_2}+4(r_0-r_1)}=\dfrac{r_0r_1r_2}{r_0r_1+6(r_0-r_1)r_2}$

【r_5の算出】

r_4と同様に解くと、 $r_5 = \dfrac{r_0 r_1 r_4 \left[r_0 r_1 + (r_0 - r_1) r_4 \pm \sqrt{4 r_0 r_1 r_4 (r_0 - r_1 - r_4)} \right]}{\left[r_0 r_1 + (r_0 - r_1) r_4 \right]^2 - 4 r_0 r_1 r_4 (r_0 - r_1 - r_4)}$

$r_4 = \dfrac{r_0 r_1 r_2}{r_0 r_1 + 6(r_0 - r_1) r_2}$ より、

$$r_0 - r_1 - r_4 = (r_0 - r_1) - \frac{r_0 r_1 r_2}{r_0 r_1 + 6(r_0 - r_1) r_2} = (r_0 - r_1) - \frac{r_0 r_1}{\frac{r_0 r_1}{r_2} + 6(r_0 - r_1)} = (r_0 - r_1) - \frac{r_0 r_1}{\frac{(r_0 + r_1)^2}{4(r_0 - r_1)} + 6(r_0 - r_1)}$$

$$= (r_0 - r_1) \left[1 - \frac{4 r_0 r_1}{(r_0 + r_1)^2 + 24 (r_0 - r_1)^2} \right] = \frac{25 (r_0 - r_1)^3}{(r_0 + r_1)^2 + 24 (r_0 - r_1)^2} = \frac{25 (r_0 - r_1)^3}{\frac{4 r_0 r_1 (r_0 - r_1)}{r_2} + 24 (r_0 - r_1)^2}$$

$$= \frac{25 (r_0 - r_1)^2 r_2}{4 \left[r_0 r_1 + 6(r_0 - r_1) r_2 \right]} = \frac{25 (r_0 - r_1)^2 r_2}{4 \frac{r_0 r_1 r_2}{r_4}} = \frac{25 (r_0 - r_1)^2 r_4}{4 r_0 r_1}$$

$$r_5 = \frac{r_0 r_1 r_4 \left[r_0 r_1 + (r_0 - r_1) r_4 \pm 5 (r_0 - r_1) r_4 \right]}{\left[r_0 r_1 + (r_0 - r_1) r_4 \right]^2 - 25 (r_0 - r_1)^2 r_4^2} = \frac{r_0 r_1 r_4 \left[r_0 r_1 + (1 \pm 5)(r_0 - r_1) r_4 \right]}{\left[r_0 r_1 + 6(r_0 - r_1) r_4 \right] \left[r_0 r_1 - 4(r_0 - r_1) r_4 \right]}$$

(i) $r_5 = \dfrac{r_0 r_1 r_4}{r_0 r_1 - 4(r_0 - r_1) r_4} = \dfrac{r_0 r_1}{\frac{r_0 r_1}{r_4} - 4(r_0 - r_1)} = \dfrac{r_0 r_1}{\frac{r_0 r_1 + 6(r_0 - r_1) r_2}{r_2} - 4(r_0 - r_1)} = \dfrac{r_0 r_1 r_2}{r_0 r_1 + 2(r_0 - r_1) r_2} = r_3$ なので除外する。

(ii) $r_5 = \dfrac{r_0 r_1 r_4}{r_0 r_1 + 6(r_0 - r_1) r_4} = \dfrac{r_0 r_1}{\frac{r_0 r_1}{r_4} + 6(r_0 - r_1)} = \dfrac{r_0 r_1}{\frac{r_0 r_1 + 6(r_0 - r_1) r_2}{r_2} + 6(r_0 - r_1)} = \dfrac{r_0 r_1 r_2}{r_0 r_1 + 12(r_0 - r_1) r_2}$

【r_3が最大になるときのr_5の算出】

$r_3 = \dfrac{r_0 r_1 r_2}{r_0 r_1 + 2(r_0 - r_1) r_2}$ に、$r_2 = \dfrac{4 r_0 r_1 (r_0 - r_1)}{(r_0 + r_1)^2}$ を代入すると、

$$r_3 = \frac{r_0 r_1}{\frac{r_0 r_1}{r_2} + 2(r_0 - r_1)} = \frac{r_0 r_1}{\frac{(r_0 + r_1)^2}{4(r_0 - r_1)} + 2(r_0 - r_1)} = \frac{4 r_0 r_1 (r_0 - r_1)}{(r_0 + r_1)^2 + 8(r_0 - r_1)^2}$$

r_3をr_1で微分して０になるr_1を求める。

$$\frac{dr_3}{dr_1} = \frac{4 r_0 \left[\left[(r_0 - r_1) - r_1 \right] \left[(r_0 + r_1)^2 + 8 (r_0 - r_1)^2 \right] - r_1 (r_0 - r_1) \left[2 (r_0 + r_1) - 16 (r_0 - r_1) \right] \right]}{\left[(r_0 + r_1)^2 + 8 (r_0 - r_1)^2 \right]^2} = \frac{4 r_0^2 (5 r_1 - 3 r_0)(r_1 - 3 r_0)}{\left[(r_0 + r_1)^2 + 8 (r_0 - r_1)^2 \right]^2} = 0$$

$r_1 = \dfrac{3}{5} r_0$ 、$3 r_0$

(i) $r_1 = \dfrac{3}{5} r_0$ のとき、 $r_2 = \dfrac{4 r_0 \cdot \frac{3}{5} r_0 \left(r_0 - \frac{3}{5} r_0 \right)}{\left(r_0 + \frac{3}{5} r_0 \right)^2} = \dfrac{3}{8} r_0$

(ii) $r_1 = 3 r_0$ のとき、 $r_2 = \dfrac{4 r_0 \cdot 3 r_0 (r_0 - 3 r_0)}{(r_0 + 3 r_0)^2} = \dfrac{-3}{2} r_0 < 0$ なので除外する。

$r_5 = \dfrac{r_0 r_1 r_2}{r_0 r_1 + 12(r_0 - r_1) r_2}$ に、 $r_1 = \dfrac{3}{5} r_0$ 、 $r_2 = \dfrac{3}{8} r_0$ を代入すると、

$$r_5 = \frac{r_0 \cdot \frac{3}{5} r_0 \cdot \frac{3}{8} r_0}{r_0 \cdot \frac{3}{5} r_0 + 12 \left(r_0 - \frac{3}{5} r_0 \right) \frac{3}{8} r_0} = \frac{3}{32} r_0$$

∴戊円径 $2 r_5 = \dfrac{3}{32}(2 r_0) = \dfrac{3}{32}(40) = \dfrac{15}{4}$ 寸