## 令和４年８月の問題 - No.2

◉問題文の意訳

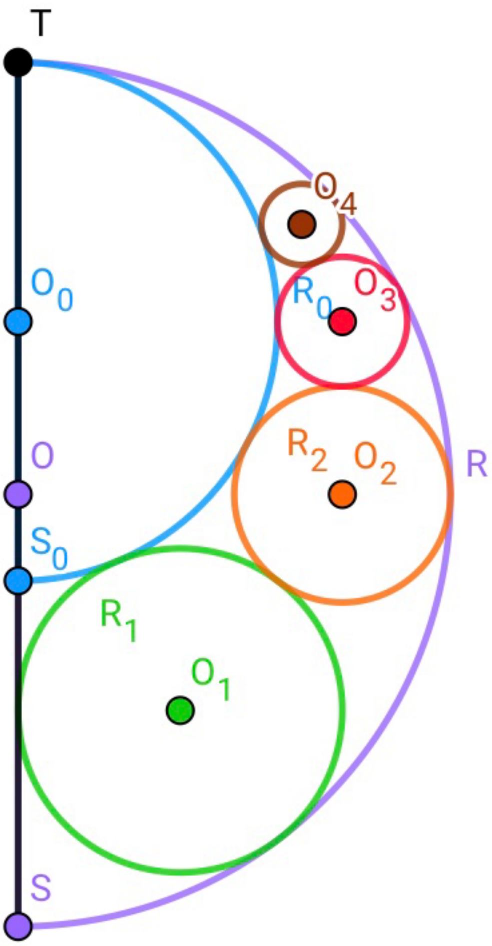
直径 40 寸の外円に甲・乙・丙・丁・戊の各円が内接する．丙円径が極大のとき，戊円径は何寸か？

◉解法

図は左右対称のため，右半分のみを図示する．

各円の記号を以下に設定する．

| 円の名称 | 外 | 甲 | 乙 | 丙 | 丁 | 戊 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 円の記号 | $R$ | $R_0$ | $R_1$ | $R_2$ | $R_3$ | $R_4$ |
| 円の中心 | $O$ | $O_0$ | $O_1$ | $O_2$ | $O_3$ | $O_4$ |
| 円の半径 | $r$ | $r_0$ | $r_1$ | $r_2$ | $r_3$ | $r_4$ |



① 反転法にて図を変換する

中心 $T$，半径 1 の単位円を反転の基準円とする．
円 $R$ 上の点 $S$ が点 $S'$ に変換されるとすると，

$$TS \cdot TS' = 1^2 \ \rightarrow \ TS' = \frac{1}{TS} = \frac{1}{2r}$$

円 $R_0$ 上の点 $S_0$ が点 $S_0'$ に変換されるとし，円 $R_0$ の半径を $r_0 = ar$ $(0 < a < 1)$ とすると，

$$TS_0 \cdot TS_0' = 1^2 \ \rightarrow \ TS_0' = \frac{1}{TS_0} = \frac{1}{2r_0} = \frac{1}{2ar}$$

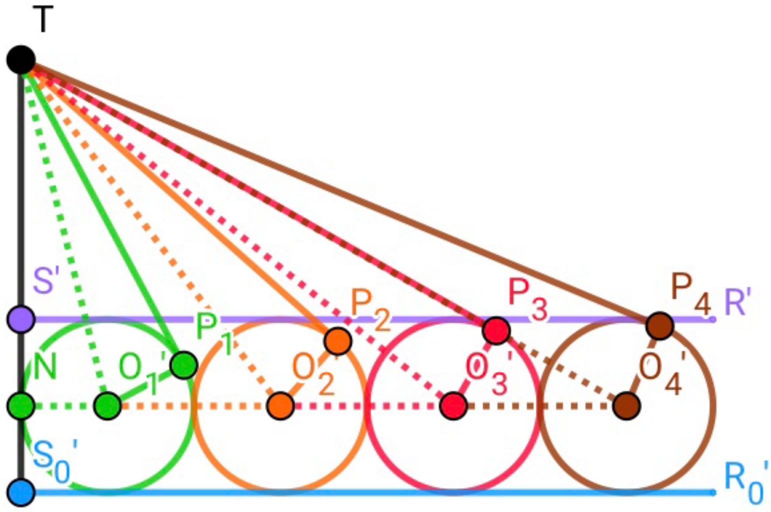
反転の基準円の中心を通る円は直線に変換されるため，$T$ を通る $R$ , $R_0$ は直線 $R'$ , $R_0'$ に変換される．

一方，反転の基準円の中心を通らない円は円に変換されるため，$T$ を通らない円 $R_1$ , $R_2$ , $R_3$ , $R_4$ は，円 $R_1'$ , $R_2'$ , $R_3'$ , $R_4'$ に変換される．また，変換後の各円の位置は，変換前の外接関係で決まる ( 下表 )

変換後の図から，変換後の半径は以下となる．

$$r_1' = r_2' = r_3' = r_4' = \frac{1}{2}(TS_0' - TS') = \frac{1-a}{4ar}$$

| 円 | $R_1$ | $R_2$ | $R_3$ | $R_4$ |
|---|---|---|---|---|
| 外接 | $R, R_0, SS_0$ | $R, R_0, R_1$ | $R, R_0, R_2$ | $R, R_0, R_3$ |




② 反転法の定理から各円の半径を求める

中心 $T$ から円 $R_1' \backsim R_4'$ への接線を考え，その接点を $P_1 \backsim P_4$ とし，２点間の距離 $TP_1 \backsim TP_4$ を求める．

$$\begin{aligned}(TP_1)^2 &= (TO_1')^2 - (O_1'P_1)^2 \\ &= \{(TN)^2 + (NO_1')^2\} - (O_1'P_1)^2 \\ &= \{(TS' + S'N)^2 + (r_1')^2\} - (r_1')^2 \\ &= \left(\frac{1}{2r} + \frac{1-a}{4ar}\right)^2 = \frac{(1+a)^2}{(4ar)^2}\end{aligned}$$

以下の定理を用い，半径 $r_1 \backsim r_4$ を求める．

$$\frac{r_1}{r_1'} = \frac{1^2}{(TP_1)^2} \to r_1 = \frac{1-a}{4ar}\frac{(4ar)^2}{(1+a)^2} = \frac{4a(1-a)}{(1+a)^2}r$$

$$(TP_2)^2 = \{(TN)^2 + (3r_2')^2\} - (r_2')^2$$
$$= \frac{(1+a)^2}{(4ar)^2} + \frac{8(1-a)^2}{(4ar)^2}$$
$$\frac{r_2}{r_2'} = \frac{1^2}{(TP_2)^2} \rightarrow r_2 = \frac{4a(1-a)}{(1+a)^2 + 8(1-a)^2} r$$

$$(TP_3)^2 = \{(TN)^2 + (5r_3')^2\} - (r_3')^2$$
$$= \frac{(1+a)^2}{(4ar)^2} + \frac{24(1-a)^2}{(4ar)^2}$$
$$\frac{r_3}{r_3'} = \frac{1^2}{(TP_3)^2} \rightarrow r_3 = \frac{4a(1-a)}{(1+a)^2 + 24(1-a)^2} r$$

$$(TP_4)^2 = \{(TN)^2 + (7r_4')^2\} - (r_4')^2$$
$$= \frac{(1+a)^2}{(4ar)^2} + \frac{48(1-a)^2}{(4ar)^2}$$
$$\frac{r_4}{r_4'} = \frac{1^2}{(TP_4)^2} \rightarrow r_4 = \frac{4a(1-a)}{(1+a)^2 + 48(1-a)^2} r$$

◎備考

$n$ 番目の円の半径は以下となる（乙 : $n = 1$）

$$r_n = \frac{4a(1-a)}{(1+a)^2 + 4n(n-1) \cdot (1-a)^2} r \quad (n \geq 1)$$

③ 丙円径の極大条件を求める

$$\frac{\partial r_2}{\partial a} = \frac{4(5a-3)(a-3)}{\{(1+a)^2+8(1-a)^2\}^2} r = 0 \rightarrow a = \frac{3}{5}, 3$$

$\therefore a = \dfrac{3}{5}$ ( $0 < a < 1$ も満足 ) のとき極大となる.

| $a$ | $\cdots$ | $\frac{3}{5}$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\partial r_2}{\partial a}$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $r_2$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{4}r$ | $\searrow$ | $-\frac{1}{2}r$ | $\nearrow$ |

◉答え

戊円径 ( 戊円の直径 ) $= \dfrac{15}{4}$ 寸 $=$ 3.75 寸

| **円の名称** | **外** | **甲** | **乙** | **丙** | **丁** | **戊** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **円の半径** | $r$ | $r_0$ | $r_1$ | $r_2$ | $r_3$ | $r_4$ |
| **円の半径(r)** | $r$ | $\frac{3}{5}r$ | $\frac{3}{8}r$ | $\frac{1}{4}r$ | $\frac{3}{20}r$ | $\frac{3}{32}r$ |
| **円の直径(r)** | $2r$ | $\frac{6}{5}r$ | $\frac{3}{4}r$ | $\frac{1}{2}r$ | $\frac{3}{10}r$ | $\frac{3}{16}r$ |
| **円の直径[寸]** | 40 | 24 | 15 | 10 | 6 | $\frac{15}{4}$ |