

今有如图外円内容  
甲乙丙丁戊円  
外円四拾寸使丙円径至多  
問戊円径

問題の意味を解釈する

図のように、外円内に甲円，乙円，丙円，丁円，戊円を接して容れる。  
外円の直径を、40寸とする。丙円の直径が最大になる場合の  
戊円の直径を問う。

〔解法例〕

ステップ1. 作図

図2のように作図する。  
外円の中心をア，甲円の中心をイ，  
左の乙円の中心をウ，左の丙円の中心をエ，  
左の丁円の中心をオ，左の戊円の中心をカとする。  
イアの延長線へウから垂線を下し、足をサとする。

外円の直径を外，甲円の直径を甲，  
乙円の直径を乙，丙円の直径を丙，  
丁円の直径を丁，戊円の直径を戊とする。  
線分アサの長さを子とする。

イアの延長線へエから垂線を下し、  
足をシとする。  
線分エシへ、ウから垂線を下しその足を  
スとする。  
線分アシの長さを丑とする。  
線分エシの長さを寅とする。

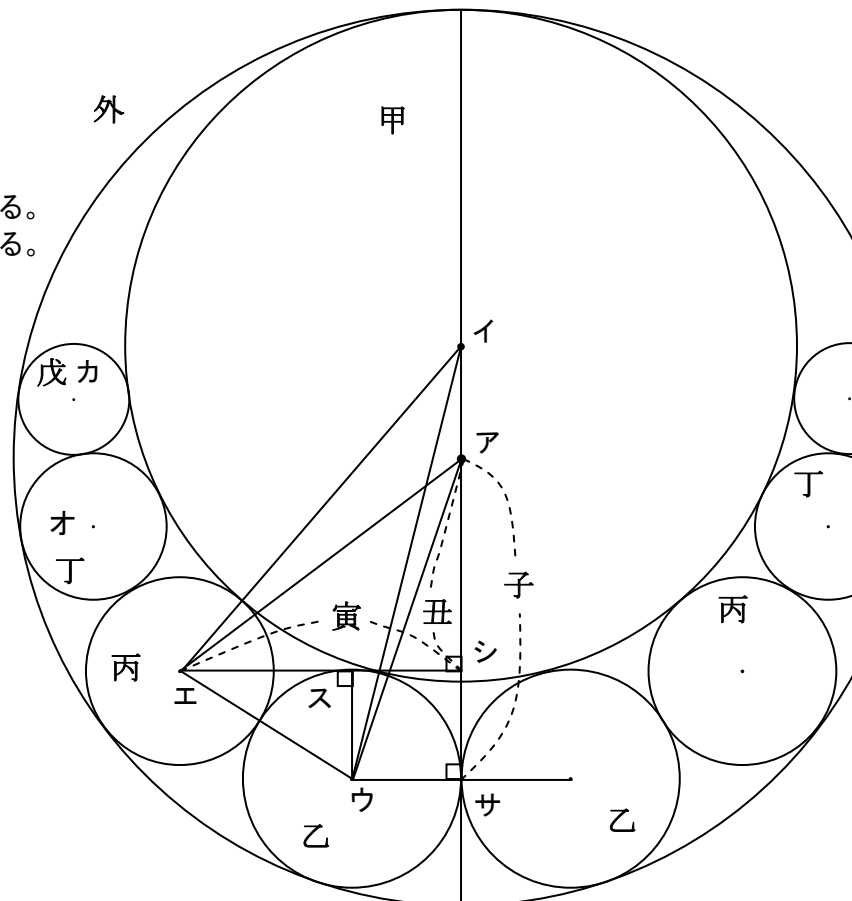


図2

## ステップ2. 乙円の直径を、外円の直径と甲円の直径で表す

直角三角形アウサ、および直角三角形イウサで、それぞれ三平方の定理から

$$\left(\frac{\text{外}}{2} - \frac{\text{乙}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\text{乙}}{2}\right)^2 + \text{子}^2 \quad (1)$$

$$\left(\frac{\text{甲}}{2} + \frac{\text{乙}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\text{乙}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\text{外}}{2} - \frac{\text{甲}}{2} + \text{子}\right)^2 \quad (2)$$

(1) から

$$\text{子}^2 = \left(\frac{\text{外}}{2}\right)^2 - 2 \times \left(\frac{\text{外}}{2}\right) \times \left(\frac{\text{乙}}{2}\right) \quad (3)$$

(2) から

$$\left(\frac{\text{甲}}{2}\right)^2 + 2 \times \left(\frac{\text{甲}}{2}\right) \times \left(\frac{\text{乙}}{2}\right) = \left(\frac{\text{外}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\text{甲}}{2}\right)^2 + \text{子}^2 - 2 \times \left(\frac{\text{外}}{2}\right) \times \left(\frac{\text{甲}}{2}\right) + 2 \times \left(\frac{\text{外}}{2}\right) \times \text{子} - 2 \times \left(\frac{\text{甲}}{2}\right) \times \text{子}$$

$$2 \times \left(\frac{\text{甲}}{2}\right) \times \left(\frac{\text{乙}}{2}\right) = \left(\frac{\text{外}}{2}\right)^2 + \text{子}^2 - 2 \times \left(\frac{\text{外}}{2}\right) \times \left(\frac{\text{甲}}{2}\right) + 2 \times \left(\frac{\text{外}}{2}\right) \times \text{子} - 2 \times \left(\frac{\text{甲}}{2}\right) \times \text{子}$$

$$2 \times \left(\frac{\text{甲}}{2}\right) \times \left(\frac{\text{乙}}{2}\right) = \left(\frac{\text{外}}{2}\right)^2 + \text{子}^2 - 2 \times \left(\frac{\text{外}}{2}\right) \times \left(\frac{\text{甲}}{2}\right) + 2 \times \left(\frac{\text{外}}{2} - \frac{\text{甲}}{2}\right) \times \text{子} \quad (4)$$

(4) に (3) を代入して

$$2 \times \left(\frac{\text{甲}}{2}\right) \times \left(\frac{\text{乙}}{2}\right) = \left(\frac{\text{外}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\text{外}}{2}\right)^2 - 2 \times \left(\frac{\text{外}}{2}\right) \times \left(\frac{\text{乙}}{2}\right) - 2 \times \left(\frac{\text{外}}{2}\right) \times \left(\frac{\text{甲}}{2}\right) + 2 \times \left(\frac{\text{外}}{2} - \frac{\text{甲}}{2}\right) \times \text{子}$$

$$2 \times \left(\frac{\text{外}}{2} - \frac{\text{甲}}{2}\right) \times \text{子} = 2 \times \left(\frac{\text{甲}}{2}\right) \times \left(\frac{\text{乙}}{2}\right) + 2 \times \left(\frac{\text{外}}{2}\right) \times \left(\frac{\text{甲}}{2}\right) + 2 \times \left(\frac{\text{外}}{2}\right) \times \left(\frac{\text{乙}}{2}\right) - 2 \times \left(\frac{\text{外}}{2}\right)^2$$

$$2 \times (\text{外} - \text{甲}) \times \text{子} = \text{甲} \times \text{乙} + \text{外} \times \text{甲} + \text{外} \times \text{乙} - \text{外}^2$$

$$2 \times (\text{外} - \text{甲}) \times \text{子} = (\text{外} + \text{甲}) \times \text{乙} - (\text{外} - \text{甲}) \times \text{外}$$

$$\text{子} = \frac{(\text{外} + \text{甲})}{(\text{外} - \text{甲})} \times \frac{\text{乙}}{2} - \frac{\text{外}}{2} \quad (5)$$

(3) に (5) を代入して

$$\left\{ \frac{(\text{外} + \text{甲})}{(\text{外} - \text{甲})} \times \frac{\text{乙}}{2} - \frac{\text{外}}{2} \right\}^2 = \left(\frac{\text{外}}{2}\right)^2 - 2 \times \left(\frac{\text{外}}{2}\right) \times \left(\frac{\text{乙}}{2}\right)$$

$$\frac{(\text{外} + \text{甲})^2}{(\text{外} - \text{甲})^2} \times \left(\frac{\text{乙}}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{(\text{外} + \text{甲})}{(\text{外} - \text{甲})} \times \frac{\text{乙}}{2} \times \left(\frac{\text{外}}{2}\right) + \left(\frac{\text{外}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\text{外}}{2}\right)^2 - 2 \times \left(\frac{\text{外}}{2}\right) \times \left(\frac{\text{乙}}{2}\right)$$

$$\frac{(\text{外} + \text{甲})^2}{(\text{外} - \text{甲})^2} \times \left(\frac{\text{乙}}{2}\right)^2 = 2 \times \frac{(\text{外} + \text{甲})}{(\text{外} - \text{甲})} \times \left(\frac{\text{外}}{2}\right) \times \left(\frac{\text{乙}}{2}\right) - 2 \times \left(\frac{\text{外}}{2}\right) \times \left(\frac{\text{乙}}{2}\right)$$

$$\frac{(\text{外} + \text{甲})^2}{(\text{外} - \text{甲})^2} \times \left(\frac{\text{乙}}{2}\right) = 2 \times \left\{ \frac{(\text{外} + \text{甲})}{(\text{外} - \text{甲})} - 1 \right\} \times \left(\frac{\text{外}}{2}\right)$$

$$\frac{(\text{外} + \text{甲})^2}{(\text{外} - \text{甲})} \times \text{乙} = 4 \times \text{甲} \times \text{外}$$

$$\text{乙} = \frac{4 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲})}{(\text{外} + \text{甲})^2} \quad (6)$$

(6) で、乙円の直径を、外円の直径と甲円の直径で表せた

### ステップ3. 丙円の直径を、外円の直径と甲円の直径で表す

直角三角形アエシ、および直角三角形イエシで、それぞれ三平方の定理から

$$\left(\frac{\text{外}}{2} - \frac{\text{丙}}{2}\right)^2 = \text{寅}^2 + \text{丑}^2 \quad (7)$$

$$\left(\frac{\text{甲}}{2} + \frac{\text{丙}}{2}\right)^2 = \text{寅}^2 + \left(\frac{\text{外}}{2} - \frac{\text{甲}}{2} + \text{丑}\right)^2 \quad (8)$$

直角三角形ウエスで、三平方の定理から

$$\left(\frac{\text{乙}}{2} + \frac{\text{丙}}{2}\right)^2 = (\text{子} - \text{丑})^2 + \left(\text{寅} - \frac{\text{乙}}{2}\right)^2 \quad (9)$$

(8) から

$$2 \times \left(\frac{\text{甲}}{2}\right) \times \left(\frac{\text{丙}}{2}\right) + \left(\frac{\text{丙}}{2}\right)^2 = \text{寅}^2 + \left(\frac{\text{外}}{2}\right)^2 + \text{丑}^2 - 2 \times \left(\frac{\text{外}}{2}\right) \times \left(\frac{\text{甲}}{2}\right) + 2 \times \left(\frac{\text{外}}{2}\right) \times \text{丑} - 2 \times \left(\frac{\text{甲}}{2}\right) \times \text{丑} \quad (10)$$

(10) に (7) を代入して

$$2 \times \left(\frac{\text{甲}}{2}\right) \times \left(\frac{\text{丙}}{2}\right) = 2 \times \left(\frac{\text{外}}{2}\right)^2 - 2 \times \left(\frac{\text{外}}{2}\right) \times \left(\frac{\text{丙}}{2}\right) - 2 \times \left(\frac{\text{外}}{2}\right) \times \left(\frac{\text{甲}}{2}\right) + 2 \times \left(\frac{\text{外}}{2}\right) \times \text{丑} - 2 \times \left(\frac{\text{甲}}{2}\right) \times \text{丑}$$

$$\text{甲} \times \text{丙} = \text{外}^2 - \text{外} \times \text{丙} - \text{外} \times \text{甲} + 2 \times \text{外} \times \text{丑} - 2 \times \text{甲} \times \text{丑}$$

$$2 \times (\text{外} - \text{甲}) \times \text{丑} = (\text{外} + \text{甲}) \times \text{丙} - \text{外} \times (\text{外} - \text{甲})$$

$$\text{丑} = \frac{(\text{外} + \text{甲})}{(\text{外} - \text{甲})} \times \frac{\text{丙} - \text{外}}{2} \quad (11)$$

(7) へ (11) を代入して

$$\left(\frac{\text{外}}{2} - \frac{\text{丙}}{2}\right)^2 = \text{寅}^2 + \left\{ \frac{(\text{外} + \text{甲})}{(\text{外} - \text{甲})} \times \frac{\text{丙} - \text{外}}{2} \right\}^2$$

$$\text{寅}^2 = \frac{(\text{外} - \text{丙})^2}{2^2} - \frac{\{(\text{外} + \text{甲}) \times \text{丙} - \text{外} \times (\text{外} - \text{甲})\}^2}{2^2 \times (\text{外} - \text{甲})^2}$$

$$\text{寅}^2 = \frac{1}{4 \times (\text{外} - \text{甲})^2} \times \left[ (\text{外} - \text{丙})^2 \times (\text{外} - \text{甲})^2 - \{(\text{外} + \text{甲}) \times \text{丙} - (\text{外} - \text{甲}) \times \text{外}\}^2 \right]$$

$$\text{寅}^2 = \frac{1}{4 \times (\text{外} - \text{甲})^2} \times \left\{ (\text{外}^2 - \text{外} \times \text{甲} - \text{外} \times \text{丙} + \text{甲} \times \text{丙})^2 - (\text{外} \times \text{丙} + \text{甲} \times \text{丙} - \text{外}^2 + \text{外} \times \text{甲})^2 \right\}$$

$$\text{寅}^2 = \frac{\text{外} \times \text{甲} \times \text{丙} \times (\text{外} - \text{甲} - \text{丙})}{(\text{外} - \text{甲})^2} \quad (12)$$

(9) に (5), (11) を代入して

$$\left(\frac{\text{乙}}{2} + \frac{\text{丙}}{2}\right)^2 = \left(\frac{(\text{外} + \text{甲})}{(\text{外} - \text{甲})} \times \frac{\text{乙}}{2} - \frac{\text{外}}{2} - \frac{(\text{外} + \text{甲})}{(\text{外} - \text{甲})} \times \frac{\text{丙}}{2} + \frac{\text{外}}{2}\right)^2 + \left(\text{寅} - \frac{\text{乙}}{2}\right)^2$$

$$(2 \times \text{寅} - \text{乙})^2 = (\text{乙} + \text{丙})^2 - \frac{(\text{外} + \text{甲})^2}{(\text{外} - \text{甲})^2} \times (\text{乙} - \text{丙})^2$$

$$(2 \times \text{寅} - \text{乙})^2 = \frac{(\text{外} \times \text{乙} + \text{外} \times \text{丙} - \text{甲} \times \text{乙} - \text{甲} \times \text{丙})^2 - (\text{外} \times \text{乙} - \text{外} \times \text{丙} + \text{甲} \times \text{乙} - \text{甲} \times \text{丙})^2}{(\text{外} - \text{甲})^2}$$

$$4 \times \text{寅}^2 - 4 \times \text{寅} \times \text{乙} + \text{乙}^2 = \frac{4 \times (\text{外} \times \text{乙} - \text{甲} \times \text{丙}) \times (\text{外} \times \text{丙} - \text{甲} \times \text{乙})}{(\text{外} - \text{甲})^2} \quad (13)$$

(13) に (12) を代入して

$$4 \times \frac{\text{外} \times \text{甲} \times \text{丙} \times (\text{外} - \text{甲} - \text{丙})}{(\text{外} - \text{甲})^2} - 4 \times \text{寅} \times \text{乙} + \text{乙}^2 = \frac{4 \times (\text{外} \times \text{乙} - \text{甲} \times \text{丙}) \times (\text{外} \times \text{丙} - \text{甲} \times \text{乙})}{(\text{外} - \text{甲})^2}$$

$$\text{寅} = \frac{\text{外} \times \text{甲} \times \text{丙} \times (\text{外} - \text{甲} - \text{丙}) - (\text{外} \times \text{乙} - \text{甲} \times \text{丙}) \times (\text{外} \times \text{丙} - \text{甲} \times \text{乙})}{(\text{外} - \text{甲})^2 \times \text{乙}} + \frac{\text{乙}}{4} \quad (14)$$

(12) と (14) から

$$\frac{\text{外} \times \text{甲} \times \text{丙} \times (\text{外} - \text{甲} - \text{丙})}{(\text{外} - \text{甲})^2} = \left\{ \frac{\text{外} \times \text{甲} \times \text{丙} \times (\text{外} - \text{甲} - \text{丙}) - (\text{外} \times \text{乙} - \text{甲} \times \text{丙}) \times (\text{外} \times \text{丙} - \text{甲} \times \text{乙})}{(\text{外} - \text{甲})^2 \times \text{乙}} + \frac{\text{乙}}{4} \right\}^2$$

$$\text{外} \times \text{甲} \times \text{丙} \times (\text{外} - \text{甲} - \text{丙}) \times 16 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \times \text{乙}^2$$

$$= \left\{ 4 \times \text{外} \times \text{甲} \times \text{丙} \times (\text{外} - \text{甲} - \text{丙}) - 4 \times (\text{外} \times \text{乙} - \text{甲} \times \text{丙}) \times (\text{外} \times \text{丙} - \text{甲} \times \text{乙}) \right.$$

$$\left. + (\text{外} - \text{甲})^2 \times \text{乙}^2 \right\}^2 \quad (15)$$

(15) の乙に、(6) を代入して

$$\begin{aligned}
 & \text{外} \times \text{甲} \times \text{丙} \times (\text{外} - \text{甲} - \text{丙}) \times 16 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \times \frac{16 \times \text{外}^2 \times \text{甲}^2 \times (\text{外} - \text{甲})^2}{(\text{外} + \text{甲})^4} \\
 &= \left[ 4 \times \text{外} \times \text{甲} \times \text{丙} \times (\text{外} - \text{甲} - \text{丙}) - 4 \times \left\{ \text{外} \times \frac{4 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲})}{(\text{外} + \text{甲})^2} - \text{甲} \times \text{丙} \right\} \right. \\
 & \quad \times \left. \left\{ \text{外} \times \text{丙} - \text{甲} \times \frac{4 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲})}{(\text{外} + \text{甲})^2} \right\} \right. \\
 & \quad \left. + (\text{外} - \text{甲})^2 \times \frac{16 \times \text{外}^2 \times \text{甲}^2 \times (\text{外} - \text{甲})^2}{(\text{外} + \text{甲})^4} \right]^2 \\
 & 4^2 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲})^5 \times (\text{外} + \text{甲})^4 \times \text{丙} - 4^2 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲})^4 \times (\text{外} + \text{甲})^4 \times \text{丙}^2 \\
 &= \left[ \left\{ (\text{外} + \text{甲})^2 - 4 \times \text{外}^2 - 4 \times \text{甲}^2 \right\} \times (\text{外} + \text{甲})^2 \times (\text{外} - \text{甲}) \times \text{丙} \right. \\
 & \quad \left. + 4 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲})^2 \times \left\{ 4 \times \text{外} \times \text{甲} + (\text{外} - \text{甲})^2 \right\} \right]^2 \\
 & \left[ \left\{ (\text{外} + \text{甲})^2 - 4 \times \text{外}^2 - 4 \times \text{甲}^2 \right\}^2 + 4^2 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right] \times \text{丙}^2 \\
 & \quad + \left[ \left\{ (\text{外} + \text{甲})^2 - 4 \times \text{外}^2 - 4 \times \text{甲}^2 \right\} - 2 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right] \times 2 \times 4 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲}) \times \text{丙} \\
 &= -4^2 \times \text{外}^2 \times \text{甲}^2 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \\
 & \text{丙}^2 + \frac{\left[ \left\{ (\text{外} + \text{甲})^2 - 4 \times \text{外}^2 - 4 \times \text{甲}^2 \right\} - 2 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right] \times 4 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲})}{\left[ \left\{ (\text{外} + \text{甲})^2 - 4 \times \text{外}^2 - 4 \times \text{甲}^2 \right\}^2 + 4^2 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right]} \times \text{丙} \\
 &= \frac{-4^2 \times \text{外}^2 \times \text{甲}^2 \times (\text{外} - \text{甲})^2}{\left[ \left\{ (\text{外} + \text{甲})^2 - 4 \times \text{外}^2 - 4 \times \text{甲}^2 \right\}^2 + 4^2 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right]} \\
 & \left[ \text{丙} + \frac{\left[ \left\{ (\text{外} + \text{甲})^2 - 4 \times \text{外}^2 - 4 \times \text{甲}^2 \right\} - 2 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right] \times 4 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲})}{\left[ \left\{ (\text{外} + \text{甲})^2 - 4 \times \text{外}^2 - 4 \times \text{甲}^2 \right\}^2 + 4^2 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right]} \right]^2 \\
 &= \frac{4^2 \times \text{外}^2 \times \text{甲}^2 \times (\text{外} - \text{甲})^2}{\left[ \left\{ (\text{外} + \text{甲})^2 - 4 \times \text{外}^2 - 4 \times \text{甲}^2 \right\}^2 + 4^2 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right]^2} \\
 & \quad \times \left[ -4 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \times \left\{ (\text{外} + \text{甲})^2 - 4 \times \text{外}^2 - 4 \times \text{甲}^2 \right\} + 4 \times (\text{外} - \text{甲})^4 - 4^2 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right]
 \end{aligned}$$

$$\left[ \frac{\left[ \left\{ (外+甲)^2 - 4 \times 外^2 - 4 \times 甲^2 \right\} - 2 \times (外-甲)^2 \right] \times 4 \times 外 \times 甲 \times (外-甲)}{\left[ \left\{ (外+甲)^2 - 4 \times 外^2 - 4 \times 甲^2 \right\}^2 + 4^2 \times 外 \times 甲 \times (外-甲)^2 \right]} \right]^2$$

$$= \frac{4^2 \times 外^2 \times 甲^2 \times (外-甲)^2}{\left[ \left\{ (外+甲)^2 - 4 \times 外^2 - 4 \times 甲^2 \right\}^2 + 4^2 \times 外 \times 甲 \times (外-甲)^2 \right]^2} \times 4^2 \times (外-甲)^4 \quad (16)$$

両辺の平方根をとって

$$\frac{\left[ \left\{ (外+甲)^2 - 4 \times 外^2 - 4 \times 甲^2 \right\} - 2 \times (外-甲)^2 \right] \times 4 \times 外 \times 甲 \times (外-甲)}{\left\{ (外+甲)^2 - 4 \times 外^2 - 4 \times 甲^2 \right\}^2 + 4^2 \times 外 \times 甲 \times (外-甲)^2}$$

$$= \pm \frac{4 \times 外 \times 甲 \times (外-甲)}{\left\{ (外+甲)^2 - 4 \times 外^2 - 4 \times 甲^2 \right\}^2 + 4^2 \times 外 \times 甲 \times (外-甲)^2} \times 4 \times (外-甲)^2 \quad (17)$$

ここで

$$(外+甲)^2 - 4 \times 外^2 - 4 \times 甲^2 = -4 \times 外 \times 甲 - 3 \times (外-甲)^2$$

$$\text{丙} = \frac{4 \times 外 \times 甲 \times (外-甲)}{\left\{ 4 \times 外 \times 甲 + 3 \times (外-甲)^2 \right\}^2 + 4^2 \times 外 \times 甲 \times (外-甲)^2} \times \left\{ 4 \times 外 \times 甲 + 5 \times (外-甲)^2 \pm 4 \times (外-甲)^2 \right\}$$

ここで

$$\left\{ 4 \times 外 \times 甲 + 3 \times (外-甲)^2 \right\}^2 + 4^2 \times 外 \times 甲 \times (外-甲)^2$$

$$= \left\{ 4 \times 外 \times 甲 + 5 \times (外-甲)^2 \right\}^2 - 4^2 \times (外-甲)^4$$

$$= \left\{ 4 \times 外 \times 甲 + 9 \times (外-甲)^2 \right\} \times \left\{ 4 \times 外 \times 甲 + (外-甲)^2 \right\}$$

$$\text{丙} = \frac{\left\{ 4 \times 外 \times 甲 + 5 \times (外-甲)^2 \pm 4 \times (外-甲)^2 \right\}}{\left\{ 4 \times 外 \times 甲 + 9 \times (外-甲)^2 \right\} \times \left\{ 4 \times 外 \times 甲 + (外-甲)^2 \right\}} \times 4 \times 外 \times 甲 \times (外-甲) \quad (18)$$

復号がプラス側の場合は

$$\text{丙} = \frac{1}{\left\{ 4 \times 外 \times 甲 + (外-甲)^2 \right\}} \times 4 \times 外 \times 甲 \times (外-甲) = \frac{4 \times 外 \times 甲 \times (外-甲)}{(外+甲)^2} \quad (19)$$

(19) と (6) から、丙=乙となり合わないため (19) は、採用しない。

復号がマイナス側の場合は

$$\text{丙} = \frac{1}{\{4 \times \text{外} \times \text{甲} + 9 \times (\text{外} - \text{甲})^2\}} \times 4 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲})$$

$$\text{丙} = \frac{4 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲})}{4 \times \text{外} \times \text{甲} + 9 \times (\text{外} - \text{甲})^2} \quad (20)$$

(20) で、丙円の直径を外円の直径、甲円の直径で表わすことができた。

## ステップ4. 丙円の直径が至多となる場合の、甲円の直径を求める

(20) 式より、外を固定したとき、甲の値により、丙が変化することがわかる。

至多とは、最大とか極大ということ。

外を40として、甲の値を変化させて、丙の最大値あるいは極大値を探索する。

甲の値が、5, 10, 15, 20, 25, 30, 35 の場合の丙の値を求めると。

甲が 5 の場合、	丙 ≒ 2. 3679
甲が 10 の場合、	丙 ≒ 4. 9485
甲が 15 の場合、	丙 ≒ 7. 4766
甲が 20 の場合、	丙 ≒ 9. 4118
甲が 25 の場合、	丙 ≒ 9. 9585
甲が 30 の場合、	丙 ≒ 8. 4211
甲が 35 の場合、	丙 ≒ 4. 8069

甲の変化に対して、丙の変化は ならぬであり、甲が20～30の範囲に、丙の最大値を与える甲の値があると考えられる。

甲の値が、20, 22, 24, 26, 28, 30 の場合の丙の値を求めると。

甲が 20 の場合、	丙 ≒ 9. 4118
甲が 22 の場合、	丙 ≒ 9. 8446
甲が 24 の場合、	丙 = 10
甲が 26 の場合、	丙 ≒ 9. 8312
甲が 28 の場合、	丙 ≒ 9. 3075
甲が 30 の場合、	丙 ≒ 8. 4211

甲が22～26の範囲に、丙の最大値を与える甲の値があると考えられる。

範囲を狭めて 甲の値が、23, 23.5, 24, 24.5, 25 の場合の丙の値を求めると。

甲が 23 の場合、	丙 ≒ 9. 9602
甲が 23.5 の場合、	丙 ≒ 9. 9899
甲が 24 の場合、	丙 = 10
甲が 24.5 の場合、	丙 ≒ 9. 9897
甲が 25 の場合、	丙 ≒ 9. 9585

甲が23.5～24.5の範囲に、丙の最大値を与える甲の値があると考えられる。

さらに範囲を狭めて 甲の値が、23.6, 23.8, 23.9, 24, 24.1, 24.2, 24.4 の場合の丙の値を求めると。

甲が 23.6 の場合、	丙 ≒ 9. 9935
甲が 23.8 の場合、	丙 ≒ 9. 9984
甲が 23.9 の場合、	丙 ≒ 9. 9996
甲が 24 の場合、	丙 = 10
甲が 24.1 の場合、	丙 ≒ 9. 9996
甲が 24.2 の場合、	丙 ≒ 9. 9984
甲が 24.4 の場合、	丙 ≒ 9. 9934

甲が23.9～24.1の範囲に、丙の最大値を与える甲の値があると考えられる。

さらに範囲を狭めて 甲の値が、23.99, 24, 24.01 の場合の丙の値を求めると。

甲が23.99の場合、 丙≒9.999996

甲が24の場合、 丙=10

甲が24.01の場合、 丙≒9.999996

丙の最大値を与える甲の値は、24でその時の丙の値は10であることが分かる。

### ステップ5. 丁円の直径を、外円の直径と甲円の直径で表す

図3のように作図を追加する。

イアの延長線へ、オから垂線を下し

垂線の足をセとする。

線分オセへ、エから垂線を下し

垂線の足をソとする。

線分アセの長さを、卯とする。

線分オセの長さを、辰とする。

イアの延長線へ、カから垂線を下し

垂線の足をタとする。

線分カタへ、オから垂線を下し

垂線の足をチとする。

線分アタの長さを、巳とする。

線分カタの長さを、午とする。

直角三角形アオセ および 直角三角形イオセで

それぞれ三平方の定理から

$$\left(\frac{\text{外}}{2} - \frac{\text{丁}}{2}\right)^2 = \text{辰}^2 + \text{卯}^2 \quad (21)$$

$$\left(\frac{\text{甲}}{2} + \frac{\text{丁}}{2}\right)^2 = \text{辰}^2 + \left(\frac{\text{外}}{2} - \frac{\text{甲}}{2} + \text{卯}\right)^2 \quad (22)$$

直角三角形エオソで、三平方の定理から

$$\left(\frac{\text{丙}}{2} + \frac{\text{丁}}{2}\right)^2 = (\text{丑} - \text{卯})^2 + (\text{辰} - \text{寅})^2 \quad (23)$$

(22) から

$$2 \times \left(\frac{\text{甲}}{2}\right) \times \left(\frac{\text{丁}}{2}\right) + \left(\frac{\text{丁}}{2}\right)^2 = \text{辰}^2 + \left(\frac{\text{外}}{2}\right)^2 + \text{卯}^2 - 2 \times \left(\frac{\text{外}}{2}\right) \times \left(\frac{\text{甲}}{2}\right) + 2 \times \left(\frac{\text{外}}{2}\right) \times \text{卯} - 2 \times \left(\frac{\text{甲}}{2}\right) \times \text{卯} \quad (24)$$

(24) に (21) を代入して

$$2 \times \left(\frac{\text{甲}}{2}\right) \times \left(\frac{\text{丁}}{2}\right) = 2 \times \left(\frac{\text{外}}{2}\right)^2 - 2 \times \left(\frac{\text{外}}{2}\right) \times \left(\frac{\text{丁}}{2}\right) - 2 \times \left(\frac{\text{外}}{2}\right) \times \left(\frac{\text{甲}}{2}\right) + 2 \times \left(\frac{\text{外}}{2}\right) \times \text{卯} - 2 \times \left(\frac{\text{甲}}{2}\right) \times \text{卯}$$

$$\text{甲} \times \text{丁} = \text{外}^2 - \text{外} \times \text{丁} - \text{外} \times \text{甲} + 2 \times \text{外} \times \text{卯} - 2 \times \text{甲} \times \text{卯}$$

$$2 \times (\text{外} - \text{甲}) \times \text{卯} = (\text{外} + \text{甲}) \times \text{丁} - \text{外} \times (\text{外} - \text{甲})$$

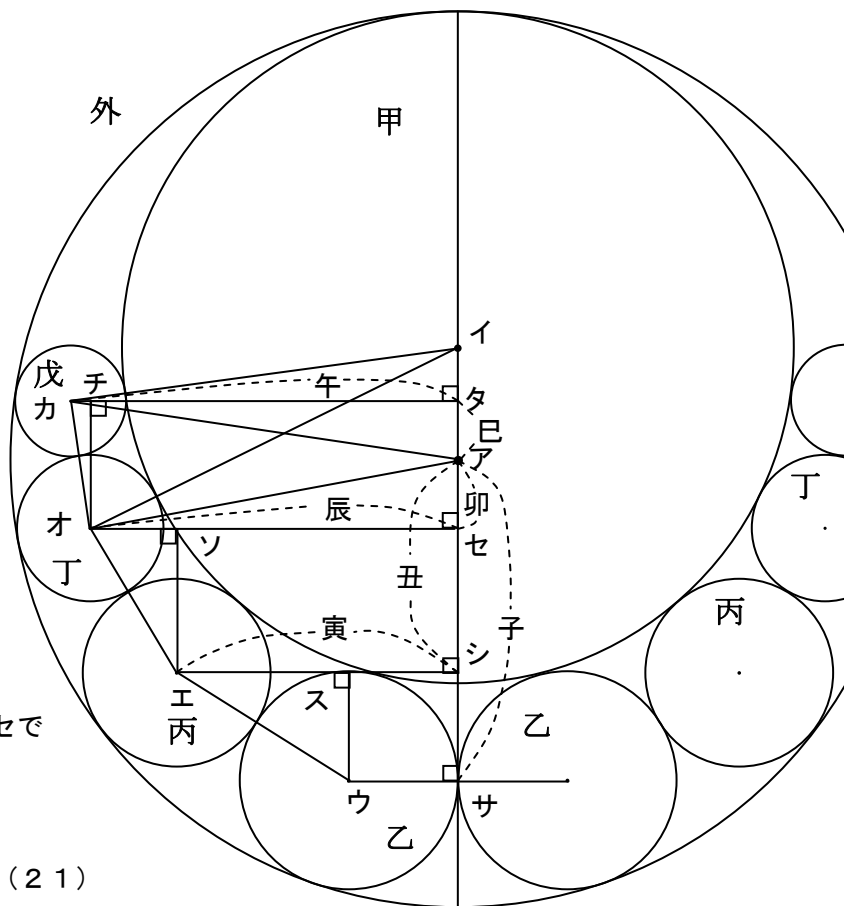


図3



$$\卯 = \frac{(外+甲)}{(外-甲)} \times \frac{丁}{2} - \frac{外}{2} \quad (25)$$

(21) へ (25) を代入して

$$\left(\frac{外}{2} - \frac{丁}{2}\right)^2 = 辰^2 + \left\{ \frac{(外+甲)}{(外-甲)} \times \frac{丁}{2} - \frac{外}{2} \right\}^2$$

$$辰^2 = \frac{(外-丁)^2}{2^2} - \frac{\{(外+甲) \times 丁 - 外 \times (外-甲)\}^2}{2^2 \times (外-甲)^2}$$

$$辰^2 = \frac{1}{4 \times (外-甲)^2} \times \left\{ \left( 外^2 - 外 \times 甲 - 外 \times 丁 + 甲 \times 丁 \right)^2 - \left( 外 \times 丁 + 甲 \times 丁 - 外^2 + 外 \times 甲 \right)^2 \right\}$$

$$辰^2 = \frac{外 \times 甲 \times 丁 \times (外-甲-丁)}{(外-甲)^2} \quad (26)$$

ここで (11) に (20) を代入して整理すると

$$丑 = \frac{(外+甲)}{(外-甲)} \times \frac{2 \times 外 \times 甲 \times (外-甲)}{4 \times 外 \times 甲 + 9 \times (外-甲)^2} - \frac{外}{2} \quad (27)$$

また (14) に (6) を代入して整理すると

$$寅 = \frac{4 \times 外 \times 甲 \times (外-甲) - \left( 3 \times 外^2 - 2 \times 外 \times 甲 + 3 \times 甲^2 \right) \times 丙}{4 \times (外-甲)^2} \quad (28)$$

(28) に (20) を入れて整理すると

$$寅 = \frac{外 \times 甲}{外-甲} \times \frac{6 \times (外-甲)^2}{4 \times 外 \times 甲 + 9 \times (外-甲)^2} \quad (29)$$

(23) に (20), (25), (27), (29) を代入して

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{2} \times \frac{4 \times 外 \times 甲 \times (外-甲)}{4 \times 外 \times 甲 + 9 \times (外-甲)^2} + \frac{丁}{2} \right)^2 \\ &= \left( \frac{(外+甲)}{(外-甲)} \times \frac{2 \times 外 \times 甲 \times (外-甲)}{4 \times 外 \times 甲 + 9 \times (外-甲)^2} - \frac{外}{2} - \frac{(外+甲)}{(外-甲)} \times \frac{丁}{2} + \frac{外}{2} \right)^2 \\ &+ \left( 辰 - \frac{外 \times 甲}{外-甲} \times \frac{6 \times (外-甲)^2}{4 \times 外 \times 甲 + 9 \times (外-甲)^2} \right)^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\text{辰} = & -\frac{\text{外} \times \text{甲} \times \left\{ 4 \times \text{外} \times \text{甲} + 9 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right\}^2}{12 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲})^3 \times \left\{ 4 \times \text{外} \times \text{甲} + 9 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right\}} \times \text{丁}^2 \\
& + \frac{\text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲}) \times \left\{ 4 \times \text{外} \times \text{甲} + 9 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right\}^2}{12 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲})^3 \times \left\{ 4 \times \text{外} \times \text{甲} + 9 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right\}} \times \text{丁} \\
& + \frac{6^2 \times \text{外}^2 \times \text{甲}^2 \times (\text{外} - \text{甲})^4}{12 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲})^3 \times \left\{ 4 \times \text{外} \times \text{甲} + 9 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right\}} \\
& + \frac{\text{外} \times \text{甲} \times \left\{ 4 \times \text{外} \times \text{甲} + 9 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right\}^2}{12 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲})^3 \times \left\{ 4 \times \text{外} \times \text{甲} + 9 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right\}} \times \text{丁}^2 \\
& - \frac{(\text{外}^2 + \text{甲}^2) \times 4 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲}) \times \left\{ 4 \times \text{外} \times \text{甲} + 9 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right\}}{12 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲})^3 \times \left\{ 4 \times \text{外} \times \text{甲} + 9 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right\}} \times \text{丁} \\
& + \frac{\text{外} \times \text{甲} \times 4^2 \times \text{外}^2 \times \text{甲}^2 \times (\text{外} - \text{甲})^2}{12 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲})^3 \times \left\{ 4 \times \text{外} \times \text{甲} + 9 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right\}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{辰} = & \frac{\text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲})}{12 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲})^3} \times \left\{ 4 \times \text{外} \times \text{甲} + 9 \times (\text{外}^2 - 2 \times \text{外} \times \text{甲} + \text{甲}^2) - 4 \times \text{外}^2 - 4 \times \text{甲}^2 \right\} \times \text{丁} \\
& + \frac{\text{外}^2 \times \text{甲}^2 \times \left\{ 4 \times \text{外} \times \text{甲} + 9 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right\}}{3 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲}) \times \left\{ 4 \times \text{外} \times \text{甲} + 9 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right\}}
\end{aligned}$$

$$\text{辰} = \frac{\left\{ -4 \times \text{外} \times \text{甲} + 5 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right\} \times \text{丁} + 4 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲})}{12 \times (\text{外} - \text{甲})^2} \quad (31)$$

(26) と (31) から

$$\frac{\text{外} \times \text{甲} \times \text{丁} \times (\text{外} - \text{甲} - \text{丁})}{(\text{外} - \text{甲})^2} = \left[ \frac{\left\{ -4 \times \text{外} \times \text{甲} + 5 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right\} \times \text{丁} + 4 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲})}{12 \times (\text{外} - \text{甲})^2} \right]^2$$

$$\text{外} \times \text{甲} \times \text{丁} \times (\text{外} - \text{甲} - \text{丁}) \times 12^2 \times (\text{外} - \text{甲})^2$$

$$= \left[ \left\{ -4 \times \text{外} \times \text{甲} + 5 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right\} \times \text{丁} + 4 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲}) \right]^2$$

$$\begin{aligned}
& -12^2 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲})^2 \times \text{丁}^2 + 12^2 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲})^3 \times \text{丁} \\
& = \left\{ -4 \times \text{外} \times \text{甲} + 5 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right\}^2 \times \text{丁}^2 \\
& + 8 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲}) \times \left\{ -4 \times \text{外} \times \text{甲} + 5 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right\} \times \text{丁} \\
& + 4^2 \times \text{外}^2 \times \text{甲}^2 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \\
& \left[ \left\{ -4 \times \text{外} \times \text{甲} + 5 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right\}^2 + 12^2 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right] \times \text{丁}^2 \\
& + \left[ 8 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲}) \times \left\{ -4 \times \text{外} \times \text{甲} + 5 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right\} - 12^2 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲})^3 \right] \times \text{丁} \\
& + 4^2 \times \text{外}^2 \times \text{甲}^2 \times (\text{外} - \text{甲})^2 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ 4^2 \times \text{外}^2 \times \text{甲}^2 + 5^2 \times (\text{外} - \text{甲})^4 + 104 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right] \times \text{丁}^2 \\
& - \left[ 8 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲}) \times \left\{ 4 \times \text{外} \times \text{甲} + 13 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right\} \right] \times \text{丁} \\
& + 4^2 \times \text{外}^2 \times \text{甲}^2 \times (\text{外} - \text{甲})^2 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \text{丁} - \frac{4 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲}) \times \left\{ 4 \times \text{外} \times \text{甲} + 13 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right\}}{4^2 \times \text{外}^2 \times \text{甲}^2 + 5^2 \times (\text{外} - \text{甲})^4 + 104 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲})^2} \right]^2 \\
& = \frac{\left[ 4 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲}) \times \left\{ 4 \times \text{外} \times \text{甲} + 13 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right\} \right]^2}{\left[ 4^2 \times \text{外}^2 \times \text{甲}^2 + 5^2 \times (\text{外} - \text{甲})^4 + 104 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right]^2} \\
& - \frac{4^2 \times \text{外}^2 \times \text{甲}^2 \times (\text{外} - \text{甲})^2}{4^2 \times \text{外}^2 \times \text{甲}^2 + 5^2 \times (\text{外} - \text{甲})^4 + 104 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲})^2}
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
& 4^2 \times \text{外}^2 \times \text{甲}^2 + 5^2 \times (\text{外} - \text{甲})^4 + 104 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲})^2 \\
& = \left\{ 4 \times \text{外} \times \text{甲} + 13 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right\}^2 - 12^2 \times (\text{外} - \text{甲})^4 \\
& = \left\{ 4 \times \text{外} \times \text{甲} + 25 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right\} \times \left\{ 4 \times \text{外} \times \text{甲} + (\text{外} - \text{甲})^2 \right\} \\
& = \left\{ 4 \times \text{外} \times \text{甲} + 25 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right\} \times (\text{外} + \text{甲})^2
\end{aligned}$$

$$\left[ \frac{4 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲}) \times \left\{ 4 \times \text{外} \times \text{甲} + 13 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right\}}{\left\{ 4 \times \text{外} \times \text{甲} + 25 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right\} \times (\text{外} + \text{甲})^2} \right]^2$$

$$= \frac{\left[ 4 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲}) \times \left\{ 4 \times \text{外} \times \text{甲} + 13 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right\} \right]^2}{\left\{ 4 \times \text{外} \times \text{甲} + 25 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right\}^2 \times \left\{ (\text{外} + \text{甲})^2 \right\}^2}$$

$$= \frac{4^2 \times \text{外}^2 \times \text{甲}^2 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \times \left\{ 4 \times \text{外} \times \text{甲} + 25 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right\} \times \left\{ 4 \times \text{外} \times \text{甲} + (\text{外} - \text{甲})^2 \right\}}{\left\{ 4 \times \text{外} \times \text{甲} + 25 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right\}^2 \times \left\{ (\text{外} + \text{甲})^2 \right\}^2}$$

$$\left[ \frac{4 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲}) \times \left\{ 4 \times \text{外} \times \text{甲} + 13 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right\}}{\left\{ 4 \times \text{外} \times \text{甲} + 25 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right\} \times (\text{外} + \text{甲})^2} \right]^2$$

$$= \frac{4^2 \times \text{外}^2 \times \text{甲}^2 \times (\text{外} - \text{甲})^2}{\left\{ 4 \times \text{外} \times \text{甲} + 25 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right\}^2 \times \left\{ (\text{外} + \text{甲})^2 \right\}^2} \times \left\{ 12^2 \times (\text{外} - \text{甲})^4 \right\} \quad (32)$$

(32) の両辺の平方根をとって

$$\frac{4 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲}) \times \left\{ 4 \times \text{外} \times \text{甲} + 13 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right\}}{\left\{ 4 \times \text{外} \times \text{甲} + 25 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right\} \times (\text{外} + \text{甲})^2}$$

$$= \pm \frac{4 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲}) \times 12 \times (\text{外} - \text{甲})^2}{\left\{ 4 \times \text{外} \times \text{甲} + 25 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right\} \times (\text{外} + \text{甲})^2}$$

$$\frac{4 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲}) \times \left\{ 4 \times \text{外} \times \text{甲} + 13 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \pm 12 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right\}}{\left\{ 4 \times \text{外} \times \text{甲} + 25 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right\} \times (\text{外} + \text{甲})^2} \quad (33)$$

復号のプラス側の場合は

$$\frac{4 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲}) \times \left\{ 4 \times \text{外} \times \text{甲} + 25 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right\}}{\left\{ 4 \times \text{外} \times \text{甲} + 25 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right\} \times (\text{外} + \text{甲})^2} = \frac{4 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲})}{(\text{外} + \text{甲})^2} \quad (34)$$

(34) と (6) から  $\text{丁} = \text{乙}$  となり合わないため (34) は、採用しない。

復号のマイナス側の場合は

$$\frac{4 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲}) \times (\text{外} + \text{甲})^2}{\left\{ 4 \times \text{外} \times \text{甲} + 25 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right\} \times (\text{外} + \text{甲})^2}$$

$$丁 = \frac{4 \times 外 \times 甲 \times (外 - 甲)}{4 \times 外 \times 甲 + 25 \times (外 - 甲)^2} \quad (35)$$

(35) で、丁円の直径を外円の直径、甲円の直径で表わすことができた。

### ステップ6. 戊円の直径を、外円の直径と甲円の直径で表す

図3の直角三角形アカタ および 直角三角形イカタで それぞれ三平方の定理から

$$\left(\frac{外}{2} - \frac{戊}{2}\right)^2 = 午^2 + 巳^2 \quad (36)$$

$$\left(\frac{甲}{2} + \frac{戊}{2}\right)^2 = 午^2 + \left(\frac{外}{2} - \frac{甲}{2} - 巳\right)^2 \quad (37)$$

直角三角形オカチで、三平方の定理から

$$\left(\frac{丁}{2} + \frac{戊}{2}\right)^2 = (卯 + 巳)^2 + (午 - 辰)^2 \quad (38)$$

(37) から

$$2 \times \left(\frac{甲}{2}\right) \times \left(\frac{戊}{2}\right) + \left(\frac{戊}{2}\right)^2 = 午^2 + \left(\frac{外}{2}\right)^2 + 巳^2 - 2 \times \left(\frac{外}{2}\right) \times \left(\frac{甲}{2}\right) - 2 \times \left(\frac{外}{2}\right) \times 巳 + 2 \times \left(\frac{甲}{2}\right) \times 巳 \quad (39)$$

(39) に (36) を代入して

$$2 \times \left(\frac{甲}{2}\right) \times \left(\frac{戊}{2}\right) = 2 \times \left(\frac{外}{2}\right)^2 - 2 \times \left(\frac{外}{2}\right) \times \left(\frac{戊}{2}\right) - 2 \times \left(\frac{外}{2}\right) \times \left(\frac{甲}{2}\right) - 2 \times \left(\frac{外}{2}\right) \times 巳 + 2 \times \left(\frac{甲}{2}\right) \times 巳$$

$$甲 \times 戊 = 外^2 - 外 \times 戊 - 外 \times 甲 - 2 \times 外 \times 巳 + 2 \times 甲 \times 巳$$

$$-2 \times (外 - 甲) \times 巳 = (外 + 甲) \times 戊 - 外 \times (外 - 甲)$$

$$巳 = -\frac{(外 + 甲)}{(外 - 甲)} \times \frac{戊}{2} + \frac{外}{2} \quad (40)$$

(36) へ (40) を代入して

$$\left(\frac{外}{2} - \frac{戊}{2}\right)^2 = 午^2 + \left\{-\frac{(外 + 甲)}{(外 - 甲)} \times \frac{戊}{2} + \frac{外}{2}\right\}^2$$

$$午^2 = \frac{(外 - 戊)^2}{2^2} - \frac{\{-(外 + 甲) \times 戊 + 外 \times (外 - 甲)\}^2}{2^2 \times (外 - 甲)^2}$$

$$午^2 = \frac{1}{4 \times (外 - 甲)^2} \times \left\{ \left(外^2 - 外 \times 甲 - 外 \times 戊 + 甲 \times 戊\right)^2 - \left(-外 \times 戊 - 甲 \times 戊 + 外^2 - 外 \times 甲\right)^2 \right\}$$

$$午^2 = \frac{外 \times 甲 \times 戊 \times (外 - 甲 - 戊)}{(外 - 甲)^2} \quad (41)$$

ここで(25)に(35)を代入して整理すると

$$\text{卯} = \frac{1}{2} \times \frac{(\text{外} + \text{甲})}{(\text{外} - \text{甲})} \times \frac{4 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲})}{4 \times \text{外} \times \text{甲} + 25 \times (\text{外} - \text{甲})^2} - \frac{\text{外}}{2} \quad (42)$$

また(31)に(35)を代入して整理すると

$$\text{辰} = \frac{\left\{ -4 \times \text{外} \times \text{甲} + 5 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right\} \times \frac{4 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲})}{4 \times \text{外} \times \text{甲} + 25 \times (\text{外} - \text{甲})^2} + 4 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲})}{12 \times (\text{外} - \text{甲})^2}$$

$$\text{辰} = \frac{10 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲})}{4 \times \text{外} \times \text{甲} + 25 \times (\text{外} - \text{甲})^2} \quad (43)$$

(38)に(42), (40), (43), (35)を代入して

$$\left\{ \frac{1}{2} \times \frac{4 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲})}{4 \times \text{外} \times \text{甲} + 25 \times (\text{外} - \text{甲})^2} + \frac{\text{戊}}{2} \right\}^2$$

$$= \left\{ \frac{1}{2} \times \frac{(\text{外} + \text{甲})}{(\text{外} - \text{甲})} \times \frac{4 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲})}{4 \times \text{外} \times \text{甲} + 25 \times (\text{外} - \text{甲})^2} - \frac{\text{外}}{2} - \frac{(\text{外} + \text{甲})}{(\text{外} - \text{甲})} \times \frac{\text{戊}}{2} + \frac{\text{外}}{2} \right\}^2$$

$$+ \left\{ \text{午} - \frac{10 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲})}{4 \times \text{外} \times \text{甲} + 25 \times (\text{外} - \text{甲})^2} \right\}^2$$

$$\left\{ \text{午} - \frac{10 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲})}{4 \times \text{外} \times \text{甲} + 25 \times (\text{外} - \text{甲})^2} \right\}^2$$

$$= \left\{ \frac{4 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲})}{4 \times \text{外} \times \text{甲} + 25 \times (\text{外} - \text{甲})^2} + \text{戊} \right\}^2 \times \frac{1}{4}$$

$$- \left\{ \frac{(\text{外} + \text{甲})}{(\text{外} - \text{甲})} \times \frac{4 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲})}{4 \times \text{外} \times \text{甲} + 25 \times (\text{外} - \text{甲})^2} - \frac{(\text{外} + \text{甲})}{(\text{外} - \text{甲})} \times \text{戊} \right\}^2 \times \frac{1}{4}$$

$$\text{午}^2 - 2 \times \frac{10 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲})}{4 \times \text{外} \times \text{甲} + 25 \times (\text{外} - \text{甲})^2} \times \text{午} + \frac{10^2 \times \text{外}^2 \times \text{甲}^2 \times (\text{外} - \text{甲})^2}{\left\{ 4 \times \text{外} \times \text{甲} + 25 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right\}^2}$$

$$= \frac{\left[ 4 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲}) + \text{戊} \times \left\{ 4 \times \text{外} \times \text{甲} + 25 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right\} \right]^2}{\left\{ 4 \times \text{外} \times \text{甲} + 25 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right\}^2} \times \frac{1}{4}$$

$$- \frac{(\text{外} + \text{甲})^2}{(\text{外} - \text{甲})^2} \times \frac{\left[ 4 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲}) - \text{戊} \times \left\{ 4 \times \text{外} \times \text{甲} + 25 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right\} \right]^2}{\left\{ 4 \times \text{外} \times \text{甲} + 25 \times (\text{外} - \text{甲})^2 \right\}^2} \times \frac{1}{4} \quad (44)$$





$$\begin{aligned} \text{午} = & \frac{\{4 \times \text{外} \times \text{甲} + 25 \times (\text{外} - \text{甲})^2\}}{(\text{外} - \text{甲})^2 \times 20} \times \text{戌} + \frac{-(\text{外}^2 + \text{甲}^2)}{(\text{外} - \text{甲})^2 \times 5} \times \text{戌} + \frac{10^2 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲})^2}{20 \times (\text{外} - \text{甲}) \times \{4 \times \text{外} \times \text{甲} + 25 \times (\text{外} - \text{甲})^2\}} \\ & + \frac{4^2 \times \text{外}^2 \times \text{甲}^2}{20 \times (\text{外} - \text{甲}) \times \{4 \times \text{外} \times \text{甲} + 25 \times (\text{外} - \text{甲})^2\}} \end{aligned}$$

$$\text{午} = \frac{21 \times (\text{外} - \text{甲})^2 - 4 \times \text{外} \times \text{甲}}{20 \times (\text{外} - \text{甲})^2} \times \text{戌} + \frac{\text{外} \times \text{甲}}{5 \times (\text{外} - \text{甲})} \quad (45)$$

(41) と (45) から

$$\frac{\text{外} \times \text{甲} \times \text{戌} \times (\text{外} - \text{甲} - \text{戌})}{(\text{外} - \text{甲})^2} = \left\{ \frac{21 \times (\text{外} - \text{甲})^2 - 4 \times \text{外} \times \text{甲}}{20 \times (\text{外} - \text{甲})^2} \times \text{戌} + \frac{\text{外} \times \text{甲}}{5 \times (\text{外} - \text{甲})} \right\}^2$$

$$\frac{\text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲})}{(\text{外} - \text{甲})^2} \times \text{戌} - \frac{\text{外} \times \text{甲}}{(\text{外} - \text{甲})^2} \times \text{戌}^2$$

$$= \left\{ \frac{21 \times (\text{外} - \text{甲})^2 - 4 \times \text{外} \times \text{甲}}{20 \times (\text{外} - \text{甲})^2} \right\}^2 \times \text{戌}^2$$

$$+ 2 \times \frac{\text{外} \times \text{甲}}{5 \times (\text{外} - \text{甲})} \times \left\{ \frac{21 \times (\text{外} - \text{甲})^2 - 4 \times \text{外} \times \text{甲}}{20 \times (\text{外} - \text{甲})^2} \right\} \times \text{戌} + \frac{\text{外}^2 \times \text{甲}^2}{5^2 \times (\text{外} - \text{甲})^2}$$

$$\left[ \left\{ \frac{21 \times (\text{外} - \text{甲})^2 - 4 \times \text{外} \times \text{甲}}{20 \times (\text{外} - \text{甲})^2} \right\}^2 + \frac{\text{外} \times \text{甲}}{(\text{外} - \text{甲})^2} \right] \times \text{戌}^2$$

$$+ \left[ \frac{2 \times \text{外} \times \text{甲}}{5 \times (\text{外} - \text{甲})} \times \frac{21 \times (\text{外} - \text{甲})^2 - 4 \times \text{外} \times \text{甲}}{20 \times (\text{外} - \text{甲})^2} - \frac{\text{外} \times \text{甲}}{(\text{外} - \text{甲})} \right] \times \text{戌} + \frac{\text{外}^2 \times \text{甲}^2}{5^2 \times (\text{外} - \text{甲})^2}$$

= 0

$$\frac{21^2 \times (\text{外} - \text{甲})^4 + 232 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲})^2 + 4^2 \times \text{外}^2 \times \text{甲}^2}{400 \times (\text{外} - \text{甲})^4} \times \text{戌}^2$$

$$- \frac{\text{外} \times \text{甲} \times \{4 \times \text{外} \times \text{甲} + 29 \times (\text{外} - \text{甲})^2\}}{50 \times (\text{外} - \text{甲})^3} \times \text{戌} + \frac{\text{外}^2 \times \text{甲}^2}{25 \times (\text{外} - \text{甲})^2} = 0$$

$$\{4^2 \times \text{外}^2 \times \text{甲}^2 + 232 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲})^2 + 21^2 \times (\text{外} - \text{甲})^4\} \times \text{戌}^2$$

$$- 8 \times \text{外} \times \text{甲} \times (\text{外} - \text{甲}) \times \{4 \times \text{外} \times \text{甲} + 29 \times (\text{外} - \text{甲})^2\} \times \text{戌}$$

$$= -\text{外}^2 \times \text{甲}^2 \times 16 \times (\text{外} - \text{甲})^2$$



$$戊 = \frac{4 \times 外 \times 甲 \times (外 - 甲) \times \{4 \times 外 \times 甲 + 29 \times (外 - 甲)^2 \pm 20 \times (外 - 甲)^2\}}{\{4 \times 外 \times 甲 + 49 \times (外 - 甲)^2\} \times \{4 \times 外 \times 甲 + 9 \times (外 - 甲)^2\}} \quad (46)$$

復号のプラス側の場合は

$$戊 = \frac{4 \times 外 \times 甲 \times (外 - 甲) \times \{4 \times 外 \times 甲 + 49 \times (外 - 甲)^2\}}{\{4 \times 外 \times 甲 + 49 \times (外 - 甲)^2\} \times \{4 \times 外 \times 甲 + 9 \times (外 - 甲)^2\}}$$

$$戊 = \frac{4 \times 外 \times 甲 \times (外 - 甲)}{\{4 \times 外 \times 甲 + 9 \times (外 - 甲)^2\}} \quad (47)$$

(47) と (20) から 戊=丙 となり合わないため (47) は、採用しない。

復号のマイナス側の場合は

$$戊 = \frac{4 \times 外 \times 甲 \times (外 - 甲)}{4 \times 外 \times 甲 + 49 \times (外 - 甲)^2} \quad (48)$$

(48) で、戊円の直径を 外円の直径、甲円の直径で表わすことができた。

## ステップ7. 丙円の直径が至多となる場合の、戊円の直径を求める

ステップ4より、丙円の直径が至多となる場合の、甲円の直径は24寸であり、問題文から外円の直径は40寸であるので、(48) かた、戊円の直径が求められる。

$$戊 = \frac{4 \times 40 \times 24 \times (40 - 24)}{4 \times 40 \times 24 + 49 \times (40 - 24)^2} = \frac{15}{4}$$

答え

外円の直径が40寸で、丙円の直径が至多となる場合の、戊円の直径は  $\frac{15}{4}$  寸