見本です

精要算法　巻之下

南筑　久留米藩　　藤田権平定資　　著
羽州　　新庄藩　　安島万蔵円直　　訂

作表問題１

今欲求弦一千寸以下鉤股弦無奇俗謂無不盡件件但不用同矩　其件件如左

題意

直角三角形（鉤股）の３辺が整数であるもので弦（斜辺）が 1000 以下のものを全て求めよ。ただし３辺が約数をもつもの（相似三角形）は除くこと。

解説

ピタゴラス数が全部で 158 個あり、表として記載されている。ソロバンで逐次計算したのであろう。今ではパソコンで瞬時に計算できるので、プログラミング練習に適した問題と思う。稚拙で恐縮だが Visual Basic 6 による参考例を以下に示す。結果が pitagorasu.txt に入ので、エクセルに読み込めば、次頁の表を作成できる。

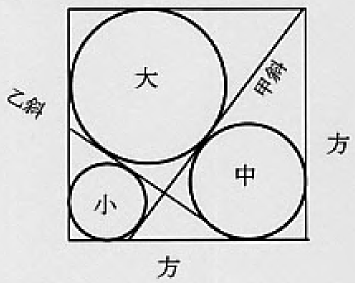
Visual Basic 6　プログラミングコード例

```
Private Sub Form_Click()
FIL1$ = "D:¥pitagorasu.txt"
Open FIL1$ For Output As #1
  n = 0
 For c = 2 To 1000
  For b = 1 To c - 1
  a = Sqr(c ^ 2 - b ^ 2)
     If a <> Int(a) Then GoTo JMP1
     If a >= b Then GoTo JMP1
       For k = 2 To a - 1
        If a / k = Int(a / k) And b / k = Int(b / k) And c / k = Int(c / k) Then GoTo JMP1
       Next k
      n = n + 1
      Print #1, n, ","; a, ","; b, ","; c
  JMP1:
  Next b
 Next c
Close #1
End Sub
```

の図形公式』があるので是非利用されることをお勧めする。

関流の藤田貞資に対抗し、最上流の始祖となった会田安明が著した『算法天生法指南』（1810）も和算テキストとして広く利用された。これをみると和算は易しい問題からの積み重ねが重要であることが良く分かる。藤田貞資が没した直後に刊行された同書には『精要算法』を参考にしたと思われる類似問題が多く載せられている。（巻末付表 2 参照）

問 2



今有如図方内隔甲乙斜容大中小円　只云
大中小円径甲乙斜及方面六和五十五寸
問方面幾何
答日　方面一十二寸
術日　置只云数以一十二乗之以五十五除
之得方面　合問

題意

正方形内を甲、乙の 2 斜線で仕切り、大、中、小の 3 円を容れる。3 個の円径、2 個の斜線、正方形 1 辺（方面）の 6 個の長さの和が 55 寸ならば正方形の辺長は幾らか。

（答）　方面　12　寸

（術）　和×12÷55＝方面（正方形の辺長）　…　◎

解法 1　和算的

【方針】解法 2 の証明から甲斜と乙斜は直交することを利用する。

図 1 で正方形の辺長を 1 とおき、他の長さはその比率とする。大,中,小円の半径を a,b,c
$\overline{DE}=x$、$\overline{FC}=y$、$\overline{EB}=z$ とする。AB⊥DE。

$x=\overline{GD}=\overline{DP}=\overline{DE}$　　∴　$x=\frac{1}{2}$

△ABC に対する三平方の定理から

$1^2+(1-z)^2=(1+z)^2$　∴　$z=\frac{1}{4}$

△DEF に対して

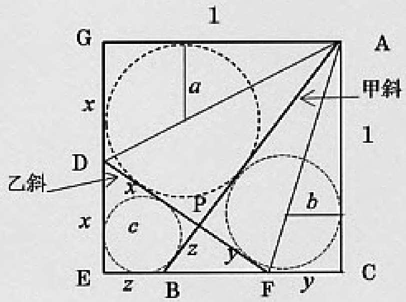
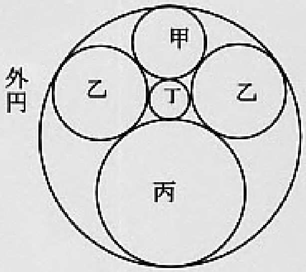


図 1

問５



今有如図大円内容五円 只云外円径二十寸 甲円径五寸 問丙円径幾何
答曰 丙円径一十二寸
術曰 置外径内減甲径余乗外径 得数以外径與甲径和除之 得丙径 合問

題意

図のように外円内に甲乙乙丙丁の５円を容れる。外円径 20 寸、甲円径５寸のとき、丙円径は幾らか。

（答）　丙円径　12 寸

（術）　$\dfrac{(外-甲)外}{外+甲}=丙$　…　◎

解法　反転・算変法（巻末基本事項 3-2）

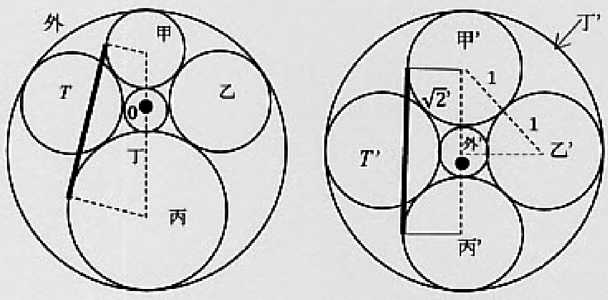
<『和算ジャーナル』No.1　p.53 より再録>

反転不変式である反転・算変法を用いる。反転中心がどこにあるかさえ注意すれば簡単に解が求まる。

元図丁円内に反転中心Ｏをうまく置くと、丁外円が同心円化された反転図が得られる。元図と反転図において、甲、丙円は離れ、かつ反転中心がその２円外にあることより、両円の間には、**法道寺型反転不変式（ケーシー*の不変式）**

$$\frac{T^2}{甲丙}=\frac{T'^2}{甲'丙'}\qquad ①$$

が成り立つ。**（注１）** ここに T、T'は２円間の共通外接線の長さである。



元図　　　　反転図（同心円化）

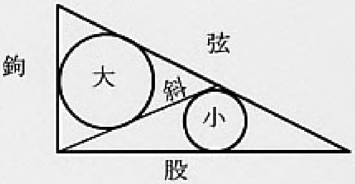
反転図で甲'円径を２とすると、

寸となり、答とも合う。(合問)

コメント

問題内容は簡単だが、答が容易には得られないように捻ってある。10 和を差$_1$、差$_2$で直接まとめようとしても、うまく行かない。まず、a、b、c を差$_1$、差$_2$で表わしてから、計算するという逆の発想が必要である。

問 10



今有如図鉤股内隔斜容大小円　只云鉤一十八寸　股二十四寸　大円径九寸　問小円径幾何
答曰　小円径八寸
術曰　別求弦　置鉤乗股名甲　置弦乗大径以甲除之　得数以減一箇　餘名乙　置併鉤股内併減弦大径　餘以乙除之　得小径　合問

題意

直角三角形内を斜線で隔て、大小の 2 円を容れる。鉤 18 寸、股 24 寸、大円径 9 寸ならば小円径は幾らか。

(答)　小円径　8 寸

(術)　別に弦を求める。鉤・股 = 甲、1 − (弦・大／甲) = 乙　より、

(鉤 + 股— 弦 − 大) ／乙 = 小径　…　◎

解法 1　平面座標

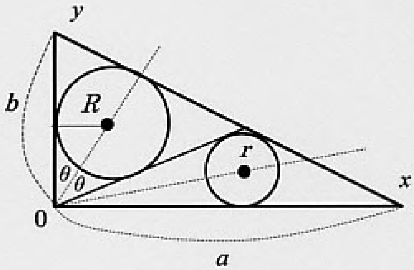


図 1

図 1 のように股 a を x 軸、鉤 b を y 軸とする。また、弦は c、大円半径は R、小円半径は r とする。原点から大円と小円の中心を通る 2 本の点線を引く。O より大円を見込む角度を 2θ とおき、$tan\,\theta = m$　とする。

(1)　大円径の中心の座標は　$(R,\ {}^{R}/_{tan\theta})$

すなわち　$(R,\ {}^{R}/_{m})$　①

(2)　小円径の中心の座標は、　$\left({}^{r}/_{tan(45°-\theta)},\ r\right)$

すなわち　$\left\{\dfrac{r\left(1+tan(45°)tan\theta\right)}{tan(45°)-tan\theta},\ \ r\right\}$　　$\therefore\ \left\{\dfrac{r(1+m)}{1-m},\ r\right\}$　②

(3)　弦の式　$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1\ \therefore\ bx+ay-ab=0$　③

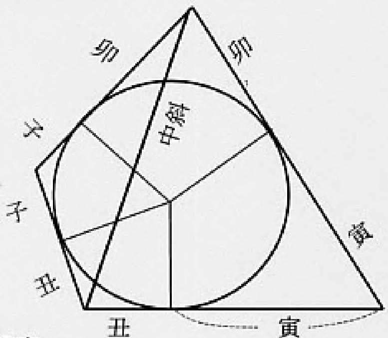
弦の長さ　$c=\sqrt{a^2+b^2}$　④

また、数値条件 $a=28$寸、$b=25$寸、$c=17$寸を代入すれば、$x=13$寸となる。(合問)

コメント

解法のように O が重心であることに気づけば、容易に解けるが、それを見抜くまでがやや大変である。深川英俊／ダン著『日本の数学　何題解けますか（下）』p.5 の問 7.1.3 に同問の解説がある。

問 14



今有如図四斜内容円 只云子三寸 寅五寸 又云丑卯和六寸 問中斜幾何
答曰 中斜九寸
術曰 置子乗寅以子寅和除之 得数四之加又云数 共得数乗又云数 得数平方開之 得中斜 合問

題意

図のように四角形の中で円が内接している。子の長さ 3 寸、寅の長さ 5 寸、丑と卯の長さの和が 6 寸のとき、中斜の長さは幾らか。

（答）　中斜　9 寸

（術）　$\sqrt{\left(\dfrac{4\,子寅}{子+寅}+丑卯和\right)丑卯和}=中斜$　… ◎

解法　加法定理

図 1 の四角形 ABCD において、中斜を x とし、子、寅、丑、卯の長さを a、b、c、d とする。問題は、a、b と和 $w(=c+d)$ から x を求めることである。

内接円（半径 r）の中心から 4 辺 a、b、c、d を見込む角度を α、β、γ、δ とする。

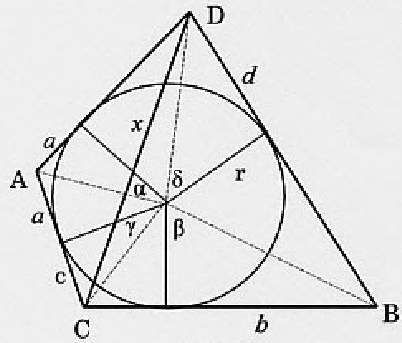


図 1

図 1 より

$$\left.\begin{aligned} a &= r\tan\alpha \\ b &= r\tan\beta \\ c &= r\tan\gamma \\ d &= r\tan\delta \end{aligned}\right\}\quad ①$$

問23

数列問題

> 今有方垜底子各等　只云六乗方垜積一百九十
> 三分之二十三為四乗方垜積　問底子幾何
> 答曰　底子各三箇
> 術曰　置分母一十六之加分子　得数以分子三段
> 除之　商分位以下棄之得数加四箇平方開之得内
> 減一箇　餘折半之　得底子　合問

題意

1から始まるべき乗和が2個ある。すなわち、7乗のべき乗和（6乗方垜という）と5乗のべき乗和（4乗方垜）で、それらの項数は同じである。いま、7乗和の23／193が5乗和であるという。べき乗和の項数（底子という）を求めよ。

（答）　項数（底子）　3

（術）　5乗和の7乗和に対する比率を分子／分母とすると、

$$\left(\sqrt{\frac{\text{分母}16+\text{分子}}{3\text{分子}}\text{の整数部分}+4}-1\right)\div 2=\text{項数}(\text{底子}) \qquad \cdots ◎$$

解法　テイラー展開による近似解法

数学公式集より

$$7\text{乗和}\quad S_7=\sum_{k=1}^{n}k^7=\frac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2) \qquad ①$$

$$5\text{乗和}\quad S_5=\sum_{k=1}^{n}k^5=\frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1) \qquad ②$$

これらべき乗和の比率を $\dfrac{S_5}{S_7}=\dfrac{b}{a}$ $(<0.26、\ n\geq 2$ の場合$)$ とする。 $S_5=\dfrac{b}{a}S_7$ より、

$$\frac{1}{12}(2n^2+2n-1)=\frac{b}{a}\frac{1}{24}(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)$$

$$\therefore\quad \frac{a}{b}=\frac{3n^4+6n^3-n^2-4n+2}{2(2n^2+2n-1)}=\frac{3}{8(2n^2+2n-1)}+\frac{6n^2+6n-5}{8} \qquad ③$$

ここで $n^2+n=X$　と置くと、

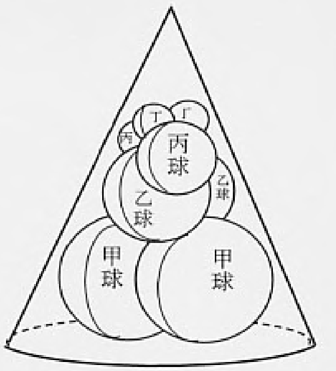
$$\frac{a}{b}=\frac{3}{8(2X-1)}+\frac{6X-5}{8}$$

Xの2次方程式となる。これを解くと、

乙円径が、図１のように甲円の左側にある場合は式⑤でよいが、右側にある場合には、黒円に相当するので、式⑥に変える必要がある。術文の式㋑の複号は、このことを示している。

類題が『算法天生法指南』巻 5-9　No.180 にある。漸化式のみで解ける。

問 54



今有如図円錐内容累球錯累二球 只云甲球径
若干 高 若干 問求逐球径術如何
答曰 依左術求逐球径
術曰 置高倍之内減甲径餘為法 置甲径以法
除之 得数自之加一箇寄位自之内減一箇 餘
平方開之以減寄位餘為因法 置甲径乗因法
得乙径 乗因法 得丙径乗因法 得丁径 逐如
此求逐球径 合問

題意

高さが与えられた円錐内に球径が既知の甲球 2 個を底面および円錐側面に接して置く。次に乙球 2 個を甲球の上で交錯し、かつ円錐側面に接するように置く。以下、丙球、丁球と 2 個ずつ逐次、球を積み重ねる。各逐球の直径を求めよ。

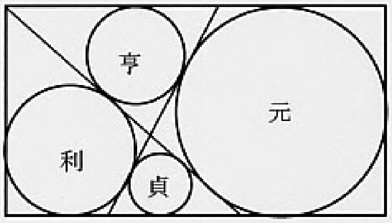
（答）　以下の術による。

（術）　$\text{高}\cdot 2-\text{甲}=\text{法}$、$\left(\frac{\text{甲}}{\text{法}}\right)2+1=\text{寄}$、$\text{寄}-\sqrt{\text{寄}^2-1}=\text{因法}$　とし、

$\text{甲径}\cdot\text{因法}=\text{乙径}$、$\text{乙径}\cdot\text{因法}=\text{丙径}$、$\text{丙径}\cdot\text{因法}=\text{丁径}$　…　◎

解法　和算的

抜粋問題 4　神壁算法（上）増刻　防州遠石八幡宮　藤田貞資門人　山田政之助



今有如図長内隔斜容元亨利貞円　亨円径四十四寸　貞円径三十三寸　問利円径幾何
答曰　利円径六十三寸
術曰　置亨円径加貞円径名極　以除亨円径乗貞円径五之内減極　余除貞円径冪得利円径　合問

題意

長方形内に元亨利貞円を容れる。亨円径 44 寸、貞円径 33 寸のとき利円径は幾らか。

（答）　利円径 63 寸

（術）　亨＋貞＝極

$$貞^2 \div \left(5\frac{亨貞}{極} - 極\right) = 利円径 \quad \cdots ◎$$

解法　平面座標

図 1 のように座標系を定める。4 円の半径を元 (g)、亨 (a)、貞 (b)、利(r) とする。
△BFE∽△ABO、△DGE∽△CHO より

$$g : r = \mathrm{BE : AO = DE : CO}$$

$$\therefore \quad g : r = \mathrm{BE - DE : AO - CO}$$
$$= \mathrm{BD : AC} = a : b$$

$$\therefore \quad g = {}^{ar}/_{b} \qquad ①$$

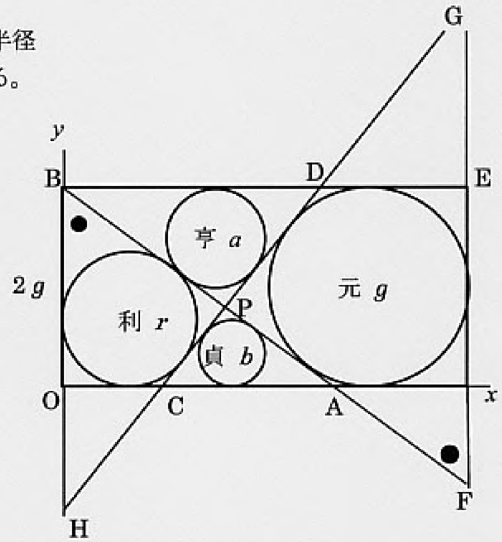


図 1

1. 直線 AB の式を求める。

$-mx - y + 2g = 0$　とする。
利円中心 (r, r) との距離が r より
基本事項 2　$-mr - r + 2g = r\sqrt{m^2+1}$

$$\therefore \quad m = \frac{2g(g-r)}{r(2g-r)} = \frac{2a(a-b)}{b(2a-b)} \qquad ②$$

よって直線 AB の式は、

$$-\frac{2a(a-b)}{b(2a-b)}x - y + \frac{2ar}{b} = 0 \qquad ③$$